Math ECG 2. 2022-2023

Mathématiques Approfondies - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`
H2B - Lycée Carnot, Paris 17e.

Devoir Maison

Solution

Exercice 1

Considérons donc la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Cette matrice est symétrique, elle est donc bien diagonalisable en base orthonormée, d'après le cours. On observe immédiatement qu'elle est de rang 1, ainsi 0 est valeur propre de multiplicité 2. On trouve l'autre valeur propre avec la trace, et on conclut donc sans trop d'efforts que

$$\mathrm{Sp}(A) = \{0,\ 3\}.$$

Commençons par chercher une b.o.n de $E_3(A)$.

$$\begin{aligned}
X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A - 3I) &\iff \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ 3y - 3z = 0 \\ -3y + 3z = 0 \end{cases} \iff x = y = z \\
&\iff X = \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

et $E_3(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. Ce vecteur n'est pas de norme 1 (mais de norme 3), on le normalise, et a donc

$$E_3(A) = \mathrm{Vect}(U_3), \qquad \text{avec } U_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ensuite, on cherche une base du noyau qu'on orthogonalisera (ou orthonormalisera) si besoin avec Gram-Schmidt.

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A) \iff x+y+z=0 \iff z = -x-y$$

$$\iff X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x-y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

et il suit que

$$E_0 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right).$$

Ces deux vecteurs, notons les X_1 et X_2, ne sont pas orthogonaux. On applique donc le procédé susmentionné.

$$U_1 = \frac{1}{||U_1||}X_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ensuite, on commence par trouver un vecteur U_2' orthogonal à U_1 et combinaison de U_1 et X_2 défini par

$$U_2' = X_2 - \langle X_2, U_1\rangle U_1 = X_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}U_1 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

Comme $||U_2'||^2 = 3/2$, on pose

$$U_2 = \frac{1}{||U_2'||}U_2' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

La famille (U_1, U_2, U_3) est alors une b.o.n de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. La matrice de passage de la base canonique vers cette base est

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Par acquis de conscience, on vérifie que cette matrice est orthogonale :

$$P\,{}^tP = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} = I.$$

On a donc

$$A = P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}{}^tP.$$

Exercice 2

Cet exercice provient du ***sujet zéro ECRICOME 2023****.*

Soit E un espace euclidien de dimension n muni d'un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

- Soient F et G deux sous-espaces de E de même dimension d
- On note p_F le projecteur orthogonal sur F et p_G le projecteur orthogonal sur G.
- Soient $\mathcal{U} = (u_1, ..., u_d)$ et $\mathcal{V} = (v_1, ..., v_d)$ des bases orthonormées de F et G respectivement.

On note $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ la matrice définie par $b_{i,j} = \langle u_i, v_j \rangle$.

(1) (a) Soit $x \in G$. On a

$$p_G\left(p_G \circ p_F(x)\right) = \left(p_G \circ p_G\right)\left(p_F(x)\right) = p_G \circ p_F(x)$$

car $p_G \circ p_G = p_G$ donc $p_G \circ p_F(x) \in G$ et G est stable sous l'action de $p_G \circ p_F$.

On note $\pi = p_G \circ p_F$.

(b) Comme p_F et p_G sont linéaires (sur E), ils le sont aussi sur G et leur composée l'est encore. Comme G est stable sous l'action de $p_G \circ p_F$, ce dernier est bien un endomorphisme de G.

(c) Si $F = G$, alors $p_F = P_G$ et $\Pi = p_F \circ P_F = p_F$.
Si F et G sont orthogonaux, alors $F \subset \mathrm{Ker}(p_G)$ et la composition est identiquement nulle.

(2) On suppose **dans cette question uniquement** que $E = \mathbb{R}^3$ et

$$F = \{(x,y,z) \in E : \ x + y = 0\}, \quad \text{et} \quad G = \{(x,y,z) \in E : \ y + z = 0\}$$

(a) F et G sont ici les noyaux de formes linéaires (non nulles) de $\mathbb{R}^3$, il s'agit donc de *plans* vectoriels, ainsi $d = 2$.

(b) Le premier vecteur u_1 donné (qui appartient bien à F) est de norme 1. On cherche donc un vecteur $u_2 = (x,y,z)$ orthogonal à u_1, qui soit dans F, donc vérifiant $x + z = 0$ et de norme 1 (ce qu'on peut toujours corriger à la fin). Les deux premières contraintes donnent

$$\begin{cases} x + y &= 0 \\ z &= 0 \end{cases}$$

On normalise sans difficulté et on trouve que $u_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)$ convient.

On procède de la même manière pour G. Le vecteur v_1 est lui aussi déjà de norme 1. On cherche donc $v_2 = (x,y,z)$ dans G, orthogonal à v_1 et de norme 1. On a dans un premier temps

$$\begin{cases} y + z &= 0 \\ x &= 0 \end{cases}$$

t on trouve que $v_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1)$ convient.

(c) Par définition, la matrice B est la matrice donc les coefficients sont

$$B = \begin{pmatrix} \langle u_1, v_1 \rangle & \langle u_1, v_2 \rangle \\ \langle u_2, v_1 \rangle & \langle u_2, v_2 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/2 \end{pmatrix}$$

et un rapide calcul donne

$${}^tBB = \begin{pmatrix} 0 & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & -1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$$

Il suit que

$$\begin{aligned} \lambda \text{ valeur propre de } {}^tBB &\iff {}^tBB - \lambda I \text{ non inversible} \\ &\iff \det\left({}^tBB - \lambda I\right) = 0 \\ &\iff 8\lambda^2 - 10\lambda + 2 = 0 \\ &\iff \lambda = 1 \text{ ou } \lambda = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

On peut donc conclure que $\mathrm{Sp}(B) = \left\{1;\ \dfrac{1}{4}\right\}$.

(3) On revient au cas général.

(a) Soit $x \in G$. Ayant à disposition une b.o.n de F avec $\mathcal{U}$, on peut écrire

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^{d} \langle x, u_i \rangle u_i.$$

Puis, comme $\mathcal{V}$ est une b.o.n de F, on a, pour tout $y \in E$,

$$p_G(y) = \sum_{j=1}^{d} \langle y, v_j \rangle v_j.$$

En prenant $y = p_F(x)$, il vient, par linéarité à gauche du produit scalaire,

$$\begin{aligned} p_G(p_F(x)) &= \sum_{j=1}^{d} \langle p_F(x), v_j \rangle v_j \\ &= \sum_{j=1}^{d} \left\langle \sum_{i=1}^{d} \langle x, u_i \rangle u_i, v_j \right\rangle v_j \\ &= \sum_{j=1}^{d} \left(\sum_{i=1}^{d} \langle x, u_i \rangle \langle u_i, v_j \rangle \right) v_j, \end{aligned}$$

ce qui est bien la formule attendue.

(b) Pour $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq d}$, la matrice ${}^tBB$ a pour coefficients $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{d} b_{k,i} b_{j,k} \right)_{1 \leq i,j \leq d}$.

Avec $b_{i,j} = \langle u_i, v_j \rangle$, la matrice ${}^tBB$ a pour coefficients

$$\left(\sum_{k=1}^{d} \langle u_k, v_i \rangle \langle u_j, v_k \rangle \right)_{1 \leq i,j \leq d}$$

La matrice de π dans la base $\mathcal{V}$ a pour coefficients les réels $m_{i,j}$ tels que

$$m_{i,j} = \langle \pi(v_i), v_j \rangle.$$

D'après ce qui précède,

$$\langle \pi(v_i), v_j \rangle = \left\langle \sum_{\ell=1}^{d} \left(\sum_{k=1}^{d} \langle v_i, u_k \rangle \langle u_k, v_\ell \rangle \right) v_\ell, v_j \right\rangle = \sum_{k=1}^{d} \langle v_i, u_k \rangle \langle u_k, v_j \rangle$$

car la famille est $\mathcal{V}$ est une b.o.n. Ainsi, ${}^tBB$ est bien la matrice de π dans la base $\mathcal{V}$. Or cette matrice est, par construction, symétrique, et comme elle représente π dans une b.o.n, on peut conclure que l'endomorphisme est lui-même symétrique.

(c) π étant un endomorphisme symétrique, le cours permet d'affirmer qu'il existe une base orthonormale dans laquelle la matrice est diagonale. En ordonnant les valeurs propres par ordre décroissant $\lambda_1 \geq ... \geq \lambda_d$ (les inégalités sont larges, celles-ci peuvent être répétées), et quitte à permuter l'ordre des vecteurs de la base orthonormale pour que cet ordre corresponde avec celui des valeurs propres, on a le résultat souhaité. Enfin, ona l'existence. Il reste à montrer l'unicité.

Cette question est un peu subtile. Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe deux $d-$uplets $(\lambda_1, ..., \lambda_d)$ et $(\lambda'_1, ..., \lambda'_d)$ qui conviennent. Notons (ε_i) (resp. (ε'_i) une base de vecteurs propres associés aux valeurs propres λ_i (resp. λ'_i).

Comme les $d-$uplets sont différents, il existe $k \in [\![1, d]\!]$ avec $\lambda_k \neq \lambda'_k$. Un des deux est strictement supérieur à l'autre. On peut supposer que $\lambda_k > \lambda'_k$ (si c'est l'autre, on refait le même raisonnement en permutant le rôles des λ_i et des λ'_i).
L'idée est un peu la suivante : on va essayer de former une famille libre trop grosse par concaténation en prenant k vecteurs de la première famille et $d-k+1$ vecteurs de la deuxième.

Si l'on regarde les valeurs propres de π supérieures ou égales à λ_k, on peut former par concaténation, une famille libre de vecteurs propres de π d'au moins k vecteurs :

$$\sum_{\substack{\lambda \in \mathrm{Sp}(\pi) \\ \lambda \geq \lambda_k}} \dim(E_\lambda(\pi)) \geq \dim\left(\mathrm{Vect}\left(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_k\right)\right) = k$$

D'autre part, avec le même genre d'argument,

$$\sum_{\substack{\lambda \in \mathrm{Sp}(\pi) \\ \lambda < \lambda_k}} \dim(E_\lambda(\pi)) \geq \dim\left(\mathrm{Vect}\left(\varepsilon'_k, \varepsilon'_{k+1} ..., \varepsilon'_d\right)\right) = d-k+1$$

On obtient au final

$$d = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(\pi)} \dim(E_\lambda(\pi)) = \sum_{\substack{\lambda \in \mathrm{Sp}(\pi) \\ \lambda \geq \lambda_k}} \dim(E_\lambda(\pi)) + \sum_{\substack{\lambda \in \mathrm{Sp}(\pi) \\ \lambda < \lambda_k}} \dim(E_\lambda(\pi)) \geq k + d - k + 1 = d+1,$$

ce qui est bien entendu absurde.
À noter que c'est une vraie question difficile.

(4) (a) Soit $x \in G$. On a

$$\begin{aligned}
\langle x, \pi(x) \rangle &= \langle x, p_G \circ p_F(x) \rangle \\
&= \langle p_G(x), p_F(x) \rangle \qquad \text{car } p_G \text{ est symétrique} \\
&= \langle x, p_F(x) \rangle \qquad \text{car } x \in G \\
&= \langle x, p_F \circ p_F(x) \rangle \\
&= \langle p_F(x), p_F(x) \rangle \qquad \text{car } p_F \text{ est symétrique} \\
&= ||p_F(x)||^2,
\end{aligned}$$

ce qui était demandé.

(b) Soit λ une valeur propre de π et x un vecteur propre associé. On a

$$\lambda ||x||^2 = \langle \lambda x, x \rangle = \langle \pi(x), x \rangle = ||p_F(x)||^2,$$

d'après la question précédente. Ainsi,

$$\lambda = \frac{||p_F(x)||^2}{||x||^2}$$

ce qui est une quantité clairement positive d'une part (on remarquera qu'on peut diviser par la norme de x car c'est une quantité non nulle car x est un vecteur propre donc non nul). Mais, on sait aussi, par Pythagore (en notant $F^\perp$ l'orthogonal de F dans G) que

$$\lambda = \frac{||p_F(x)||^2}{||x||^2} = \frac{||x||^2 - ||p_{F^\perp}(x)||^2}{||x||^2} \leq \frac{||x||^2}{||x||^2} = 1$$

et on a bien $\lambda \in [0; 1]$.

(5) On reprend donc le $d-$uplet précédent $(\lambda_1, .., \lambda_d)$ formé des valeurs propres de π. Comme pour tout i, $\lambda_i \in [0; 1]$ et que le cos est positif sur $[0; \pi/2]$, on a

$$\cos^2(t) = \lambda_i \Longleftrightarrow \cos(t) = \sqrt{\lambda_i}.$$

Or la fonction cos est bijective de $[0;\pi/2]$ sur $[0;1]$, et il existe donc un unique $t_i \in [0,\pi/2]$ tel que

$$\cos(t_i) = \sqrt{\lambda_i}$$

ou encore

$$\cos^2(t_i) = \lambda_i.$$

On désigne alors, pour tout couple (F,G) de sous-espaces de même dimension d, le $d-$uplet $(t_1,...,t_d)$ par la notation $\text{Angle}(F,G)$.

(6) **Exemples**.

(a) Cette équivalence se montre bien entendu par double implication.

- $\boxed{\Longleftarrow}$ On a déjà vu que si F et G étaient orthogonaux alors, $\pi = 0$. Ainsi tous les λ_i valeurs propres sont nuls ce qui donne $t_i = \pi/2$ pour tout i et donc $\text{Angle}(F,G) = \left(\frac{\pi}{2},...,\frac{\pi}{2}\right)$.

- $\boxed{\Longrightarrow}$ Si pour tout i, $t_i = \pi/2$, alors toutes les valeurs propres de π sont nulles et $\pi = 0$. Soit alors $x \in G$. D'après ce qui précède,

$$||p_F(x)||^2 = \langle \pi(x), x\rangle = 0$$

donc $P_F(x) = 0$ donc $x \in F^\perp$. Ainsi, $G \subset F^\perp$ et F et G sont bien orthogonaux.

(b) Même format de démonstration.

- $\boxed{\Longleftarrow}$ Si $F = G$ alors $\pi = p_G \circ p_G = p_G = \text{id}_G$ et ses valeurs propres sont toutes égales à 1. Les t_i sont donc tous égaux à 0.

- $\boxed{\Longrightarrow}$ Si pour tout i, $t_i = 0$, alors toutes les valeurs propres de π sont égales à 1 et $\pi = \text{id}_G$. Soit $x \in G$. On a alors

$$||x||^2 = \langle \pi(x), x\rangle = ||p_F(x)||^2$$

Par Pythagore, il suit que

$$||x - p_F(x)||^2 = 0$$

ou encore $x \in F$. Donc $G \subset F$ mais par égalité des dimensions on a $F = G$.

(c) On a trouvé précédemment (en ordonnant de manière croissante) $\lambda_1 = 1 = \sqrt{\lambda_1}$ et $\lambda_2 = 1/4$ donc $\sqrt{\lambda_2} = 1/2$. Il suit que $t_1 = 0$ et $t_2 = \pi/3$. On peut donc conclure

$$\text{Angle}(F,G) = \left(0, \frac{\pi}{3}\right).$$