Math ECG 2. 2022-2023

Mathématiques Appliquées - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
ENC Bessières, Paris 17e.

Devoir de rentrée (a.k.a DS 0)

Jeudi 1er Septembre
Durée : 2 heures 40

Les questions précédées de $(*)$ *sont réservées aux khubes.*

Exercice

On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) (a) Déterminer $(A-I)^2$.
(b) En déduire que A est inversible et écrire A^{-1} comme combinaison linéaire de I et A.

(2) On pose $A = N + I$.
(a) Exprimer pour tout entier naturel n, la matrice A^n comme combinaison linéaire de I et N, puis l'écrire comme combinaison linéaire de I et A.
(b) Vérifier que l'expression précédente est aussi valable pour $n = -1$.

(3) (a) $(*)$ Déterminer l'unique valeur propre possible de A et vérifier qu'elle est bien valeur propre.
(b) $(*)$ La matrice A est-elle diagonalisable?

(4) On note f l'endomorphisme représenté par A dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ et on introduit les deux vecteurs

$$u_1 = (f - \mathrm{Id})(e_1) \quad \text{et} \quad u_2 = e_1 + e_3.$$

(a) Déterminer le rang de $f - \mathrm{Id}$.
(b) Justifier que (u_1, u_2) forme une base de $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$.
(c) Montrer que la famille (u_1, u_2, e_1) forme une base de $\mathbb{R}^3$.
(d) Déterminer la matrice T de f dans cette nouvelle base.

(5) (a) $(*)$ Justifier que la matrice P ci-dessous est inversible et vérifie $A = PTP^{-1}$

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Déterminer P^{-1} à l'aide d'un pivot de Gauss.

Problème

On considère une urne contenant une boule noire et trois boules blanches. On effectue le jeu suivant :

- On commence par piocher des boules de l'urne une à une avec remise jusqu'à obtenir la boule noire (que l'on remet aussi dans l'urne). On définit la variable aléatoire N égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir la boule noire.

- Puis, lorsque N prend une valeur entière positive non nulle notée n, on réalise alors une seconde série de n tirages dans l'urne, toujours avec remise. On définit la variable aléatoire X égale au nombre de fois où la boule noire a été obtenue dans cette seconde série de tirages.

On **admet**, dans un premier temps, l'égalité

$$\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}},$$

valable pour $x \in]-1,1[$ et $k \in \mathbb{N}$. La démonstration de cette égalité fera l'objet d'une quatrième et dernière partie (facultative) et difficile réservée aux étudiant.e.s averti.e.s.

Partie I : loi de N et loi de X

(1) (a) Reconnaître la loi de la variable aléatoire N en justifiant votre réponse. Donner son univers image, l'expression de $P(N=n)$, pour tout $n \in N(\Omega)$, puis l'espérance et la variance de N.

(b) $(*)$ Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}$. Justifier (ou admettre pour les non-khubes) que

$$P_{(N=n)}(X=k) = \begin{cases} 0, & \text{si } k > n \\ \binom{n}{k}\left(\frac{1}{4}\right)^k\left(\frac{3}{4}\right)^{n-k}, & \text{si } 0 \leq k \leq n \end{cases}$$

(c) Vérifier, à l'aide de la formule des probabilités totales, que : $P(X=0) = \frac{3}{7}$.

(2) (a) Montrer, toujours avec le formule des probabilités totales, que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$P(X=k) = \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1} \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k}\left(\frac{9}{16}\right)^n.$$

(b) En déduire, à l'aide de la formule admise ci-avant, que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\quad P(X=k) = \frac{16}{21}\left(\frac{3}{7}\right)^k$.

(3) Vérifier qu'on a bien $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k) = 1$.

(4) Montrer que X admet une espérance et calculer $E(X)$.

Partie II : simulation avec Python

(5) Recopier et compléter la fonction Python suivante qui permet de simuler le *couple* (N,X):

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

def simul_NX():
    N=1
    while rd.rand() .......
        ........
    X=rd.binomial(...., ....)
    return [N,X]
```

(6) On ajoute les instructions suivantes

```
ech=[]
for k in range(10000):
    [n,x]=simul_NX()
    ech.append(x)
print(np.mean(ech))
```

dont l'exécution donne

Affichage Python

```
>>>
1.0185
```

Comment interpréter cet affichage? Est-ce cohérent avec ce qui précède?

Partie III : Première étape en double et loi du max

Dans cette partie, le protocole reste le même, sauf qu'**on effectue deux fois la première étape**.

On note alors N_1 le nombre de tirages nécessaires pour obtenir la boule noire lors de la première fois où la première étape est réalisée et N_2 le nombre de tirages nécessaires pour obtenir la boule noire lors de la deuxième fois où la première étape est réalisée. *Bien entendu, N_1 et N_2 sont alors* ***indépendantes****.*

On pose à présent $N = \max(N_1, N_2)$, la plus grande des deux valeurs.

A l'issue de ce protocole, X est définie comme auparavant, comme le nombre de fois où la boule noire a été obtenue dans cette seconde série de n tirages, n étant la valeur de N.

(7) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $P(N_1 \leq n) = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

(8) Justifier que, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P(N \leq n) = P([N_1 \leq n] \cap [N_2 \leq n]) = P([N_1 \leq n]) \times P([N_2 \leq n])$$

et en déduire l'expression de $P(N \leq n)$.

(9) Soit $n \geq 2$, exprimer $P(N = n)$ en fonction de $P(N \leq n)$ et de $P(N \leq n-1)$. Vérifier que cette expression reste valable pour $n = 1$.

(10) En déduire, en développant l'expression précédente, que

$$P(N = n) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} - \frac{7}{16}\left(\frac{9}{16}\right)^{n-1}.$$

(11) Vérifier que N admet une espérance et que $E(N) = \dfrac{40}{7}$.

Partie IV : une démonstration de la formule admise

(12) Rappeler la formule du triangle de Pascal liant les coefficients $\binom{j}{i}$, $\binom{j}{i+1}$ et $\binom{j+1}{i+1}$.

(13) Soit m un entier naturel fixé. A l'aide de la formule du triangle de Pascal, montrer par récurrence que $\mathcal{P}(q)$:

$$\sum_{k=m}^{q} \binom{k}{m} = \binom{q+1}{m+1}$$

est vraie pour tout entier $q \geq m$.

(14) Soit k un entier naturel non nul. et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires, mutuellement indépendantes, suivant toutes la loi géométrique de paramètre $1-x$, avec $x \in]0;1[$, et on pose

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} X_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_k.$$

(a) Déterminer $S_k(\Omega)$ puis établir que, $\forall n \geq k+1$, on a :

$$P\left(S_{k+1} = n\right) = \sum_{j=k}^{n-1} P((S_k = j) \cap (X_{k+1} = n-j)).$$

(b) En déduire, par récurrence sur k , que

$$\forall n \geq k, \quad P(S_k = n) = \binom{n-1}{k-1}(1-x)^k x^{n-k}.$$

(c) En déduire, pour x de $]0,1[$ et $k \in \mathbb{N}^*$, que :

$$\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n-1}{k-1} x^{n-k} = \frac{1}{(1-x)^k}.$$

(d) Conclure.

Bonus

On dispose du programme ci-dessous. Que va renvoyer `mystere(8973)`?

```
import numpy as np

def taille(x):
    l=0
    while x/(10**l)>=1:
        l=l+1
    return l

def mystere(x):
    n=taille(x)
    L=np.zeros(n)
    for k in range(n, 0, -1):
        L[k-1]=np.floor(x/(10**(k-1)))
        x=x-L[k-1]*10**(k-1)
    y=0
    for j in range(0, n):
        y+=L[j]*10**(n-1-j)
    return y
```