Math ECG 2. 2022-2023

Mathématiques Appliquées - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
ENC Bessières, Paris 17e.

Devoir de rentrée

Solution

Exercice

Cet exercice est extrait du sujet **EDHEC 2019**. On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) (a) $A - I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ et, sans difficulté : $(A-I)^2 = 0$.

(b) On a $A^2 - 2A + I = 0$ donc $I = -A^2 + 2A = A(-A + 2I)$. On sait que si $AB = I$ alors A est inversible et $A^{-1} = B$, donc A est inversible et $A^{-1} = -A + 2I$.

(2) (a) N et I commutent, donc on peut développer $(N+I)^n$ avec la formule du binôme.
De plus, comme $N^2 = 0$, on a $N^k = 0$ pour $k \geq 2$. En effet, c'est vrai pour $k = 2$ et si $N^k = 0$, alors $N^{k+1} = N \cdot N^k = N \cdot 0 = 0$ ce qui conclut cette très brève mais nécessaire récurrence. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} A^n &= (N+I)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k \\ &= \binom{n}{0} N^0 + \binom{n}{1} N^1 = I + nN \\ &= I + n(A - I) = (1-n)I + nA. \end{aligned}$$

(b) Pour $n = -1$, $(1 - (-1))I - A = 2I - A = A^{-1}$ d'après la première question de l'exercice. La formule est toujours valable.

(3) (a) De la relation $(A-I)^2 = 0$, on déduit que le polynôme $(X-1)^2$ annule A. Or ce polynôme n'a qu'une seule racine 1. Il suit que la seule valeur propre possible pour A est 1 ou encore

$$\mathrm{sp}(A) \subset \{1\}.$$

Il est alors facile de voir que 1 est bien valeur propre. En effet, $A - I$ ne peut être inversible, sinon on aurait l'existence de $(A-I)^{-1}$ ce qui contredit le fait que $(A-I)^2 = 0$.

(b) Une matrice avec une seule valeur propre qui n'est pas déjà diagonale ne peut être diagonalisable. On en refait la preuve. Si c'était le cas, on aurait l'existence d'une matrice Q inversible et d'une matrice D diagonale (ici $D = I$ car 1 est la seule valeur propre) telles que $A = QDQ^{-1} = QQ^{-1} = I$ ce qui est absurde. (On aurait aussi pu voir que la dimension de $\mathrm{Ker}(A - I)$ était différente de 3.)

(4) On note f l'endomorphisme représenté par A dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ et on introduit les deux vecteurs

$$u_1 = (f - \mathrm{Id})(e_1) \quad \text{et} \quad u_2 = e_1 + e_3.$$

(a) L'endomorphisme $f - \mathrm{Id}$ est représenté dans la base canonique par la matrice $A - I$ explicitée ci-dessus. Son rang est la dimension de l'espace engendré par ses colonnes: celles-ci sont clairement liées (c'est quasiment, au signe près, trois fois la même) ainsi $\mathrm{rg}(f - \mathrm{Id}) = 1$.

(b) Par le théorème du rang, il suit que $\dim(\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})) = 3 - 1 = 2$. On vérifie aisément que u_1 et u_2 sont dans ce noyau car $f(u_1) = u_1$ et $f(u_2) = u_2$. De plus, ces deux vecteurs sont non colinéaires: ils engendrent donc un sous-espace de $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$(lui même de dimension 2) de dimension 2, c'est donc une famille génératrice (et libre) de $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$ donc une base.

(c) Comme la famille (u_1, u_2, e_1) est constituée de 3 vecteurs et que $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3, il suffit de montrer que celle-ci est libre pour qu'elle en forme une base. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Alors

$$au_1 + bu_2 + ce_1 = 0 \qquad \iff \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} -a + b + c & = & 0 \\ -2a & = & 0 \\ a + b & = & 0 \end{array} \right.$$
$$\iff \quad a = b = c = 0$$

et on a bien la conclusion souhaitée.

(d) Comme $f(u_1) = u_1$, $f(u_2) = u_2$ et (par définition) $f(e_1) = u_1 = e_1$, on a

$$T = \mathrm{Mat}(f, (u_1, u_2, e_1)) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(u_1) & f(u_2) & f(e_1) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{coordonnée selon } u_1 \\ \leftarrow \text{coordonnée selon } u_2 \\ \leftarrow \text{coordonnée selon } e_n \end{array}$$

(5) (a) En notant P la matrice de passage de la base canonique vers la base (u_1, u_2, e_1) on a alors que P est bien égale à la matrice ci-dessous (et qu'elle est bien inversible: ses colonnes forment une base de $\mathbb{R}^3$) et la formule de changement de base donne bien $A = PTP^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) On inverse P par pivot de Gauss simultané.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -2 & -2 \end{array}\right)$$
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -2 & -2 \end{array}\right)$$

et on obtient

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Bonus

On montre que la formule obtenue ci-dessus pour les puissances $n \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$ de A est en fait valable pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Soit $n \in \mathbb{Z}, n \leq -1$. On veut montrer que

$$A^n = (1-n)I + nA.$$

En écrivant $n = -m$, où $m \in \mathbb{N}^*$, on voit que $A^n = A^{-m} = (A^m)^{-1}$. Or on connait A^m. Il faut donc montrer que $(1-n)I + nA = (1+m)I - mA$ est l'inverse de A^m ou de manière équivalente que

$$((1+m)I - mA) \cdot ((1-m)I + mA) = I.$$

Mais,

$$\begin{aligned} ((1+m)I - mA) \cdot ((1-m)I + mA) &= (1-m^2)I + [(1+m)m - m(1-m)]A - m^2A^2 \\ &= (1-m^2)I + 2m^2A - m^2(-I + 2A) \\ &= I \end{aligned}$$

et on a bien ce qu'on voulait.

Problème

On considère une urne contenant une boule noire et trois boules blanches. On effectue le jeu suivant :

- On commence par piocher des boules de l'urne une à une avec remise jusqu'à obtenir la boule noire (que l'on remet aussi dans l'urne). On définit la variable aléatoire N égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir la boule noire.

- Puis, lorsque N prend une valeur entière positive non nulle notée n, on réalise alors une seconde série de n tirages dans l'urne, toujours avec remise. On définit la variable aléatoire X égale au nombre de fois où la boule noire a été obtenue dans cette seconde série de tirages.

On **admet**, dans un premier temps, l'égalité

$$\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}},$$

valable pour $x \in]-1,1[$ et $k \in \mathbb{N}$. La démonstration de cette égalité fera l'objet d'une quatrième et dernière partie (facultative) et difficile réservée aux étudiant.e.s averti.e.s.

Partie I : loi de N et loi de X

(1) (a) La première expérience ayant lieu avec remise, chaque tirage se produit dans les mêmes conditions avec une probabilité $1/4$ d'obtenir la boule noire. La variable N correspond alors au *temps d'attente du premier succès* (obtenir la boule noire) lors d'une répétition (infinie) d'épreuves de Bernoulli (identiques et indépendantes): on reconnait une loi géométrique de paramètre $1/4$

$$N \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{4}\right).$$

En particulier, $N(\Omega) = \mathbb{N}^*$, et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$P(N = k) = \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \frac{1}{4}.$$

Le cours nous donne aussi

$$E(N) = 4, \qquad V(N) = 12.$$

(b) Soit $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Sachant $[N = n]$, on réalise n tirages avec remise et on s'intéresse au nombre de succès (obtenir la noire) lors de ces n tirages. Si $k > n$, il n'est pas possible d'obtenir plus de boules noires que de boules tirées et la probabilité cherchée est nulle. Sinon, on reconnait alors une loi binomiale de paramètres n et $1/4$, on peut donc écrire, pour $k \in [\![0, n]\!]$,

$$P_{(N=n)}(X = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{3}{4}\right)^{n-k}.$$

(c) D'après la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'évènements $\{(N = n) :\ n \in \mathbb{N}^*\}$, on peut écrire

$$\begin{aligned} P(X = 0) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P_{(N=n)}(X = 0) P(N = n) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{n}{0} \left(\frac{3}{4}\right)^n \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \left(\frac{1}{4}\right) \\ &= \frac{3}{16} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{2(n-1)} = \frac{3}{16} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{9}{16}\right)^{n-1} \\ &= \frac{3}{7}. \end{aligned}$$

(2) On admet, dans un premier temps, l'égalité

$$\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}},$$

valable pour $x \in]-1, 1[$ et $k \in \mathbb{N}$.

(a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Toujours grâce à la formule des probabilités totales appliquée au même s.c.e et en utilisant que $P_{(N=n)}(X = k) = 0$ si $n < k$, on obtient

$$\begin{aligned} P(X = k) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P_{(N=n)}(X = k) P(N = n) = \sum_{n=k}^{+\infty} P_{(N=n)}(X = k) P(N = n) \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{3}{4}\right)^{n-k} \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \frac{1}{4} \\ &= \left(\frac{1}{4}\right)^{k+1} \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} \left(\frac{3}{4}\right)^{2n-(k+1)} \\ &= \left(\frac{1}{4}\right)^{k+1} \left(\frac{3}{4}\right)^{-(k+1)} \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} \left(\frac{3}{4}\right)^{2n} \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1} \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} \left(\frac{9}{16}\right)^n \end{aligned}$$

(b) En utilisant la formule admise en préambule (avec $x = 9/16$), on obtient

$$\begin{aligned} P(X=k) &= \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1} \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} \left(\frac{9}{16}\right)^n \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1} \times \frac{\left(\frac{9}{16}\right)^k}{\left(1-\frac{9}{16}\right)^{k+1}} \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1} \left(\frac{9}{7}\right)^k \frac{16}{7} \\ &= \frac{16}{21} \left(\frac{3}{7}\right)^k. \end{aligned}$$

(3) En combinant les différentes questions précédentes

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k) &= P(X=0) + \sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k) \\ &= \frac{3}{7} + \frac{16}{21} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{3}{7}\right)^k \\ &= \frac{3}{7} + \frac{16}{49} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{3}{7}\right)^{k-1} \\ &= \frac{3}{7} + \frac{16}{49} \times \frac{1}{1-\frac{3}{7}} \\ &= \frac{3}{7} + \frac{16}{49} \times \frac{7}{4} = \frac{3}{7} + \frac{4}{7} \\ &= 1, \end{aligned}$$

comme attendu.

(4) La variable X admet une espérance si et seulement si la série de terme général $kP(X = k)$ converge. Or, pour $k \geq 1$,

$$kP(X=k) = \frac{16}{49} k \left(\frac{3}{7}\right)^{k-1}$$

et on reconnait le multiple du terme général d'une série géométrique dérivée de raison $3/7$ donc convergente. Ainsi, X admet un espérance et

$$E(X) = \frac{16}{49} \times \frac{1}{\left(1-\frac{3}{7}\right)^2} = 1.$$

Partie II : simulation avec Python

(5) En Python, la réalisation de l'évènement de l'obtention d'une boule noire (de probabilité $1/4$) est ici représenté par le fait que le nombre aléatoire généré par `rd.rand()` soit inférieur à $1/4$. Tant que ce n'est pas le cas, on continue à tirer et la variable `N` qui compte le nombre de lancers nécessaires, augmente de 1. Ensuite, lorsque `N` *stocke* une valeur définitive, on simule X avec `rd.binomial(N, 1/4)`. On renvoie aussi au TP n°1 pour la méthode générale pour ce type de programme.

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

def simul_NX():
    N=1
```

```
    while rd.rand()>= 1/4
        N=N+1
    X=rd.binomial(N, 1/4)
    return [N,X]
```

(6) La variable `ech` contient les réalisations de 1000 simulations de la variable aléatoire X et le programme demande l'affichage de la *moyenne* (via la commande `mean()`) des valeurs de la liste. La moyenne empirique d'un $n-$échantillon d'une variable fournit une *estimation* (tout cela deviendra plus clair à la fin de l'année avec le dernier chapitre) de l'espérance de X. La valeur affichée est proche de 1, on retrouve le résultat précédent $E(X) = 1$. C'est cohérent.

Partie III : Première étape en double et loi du max

Dans cette partie, le protocole reste le même, sauf qu'**on effectue deux fois la première étape**.

On note alors N_1 le nombre de tirages nécessaires pour obtenir la boule noire lors de la première fois où la première étape est réalisée et N_2 le nombre de tirages nécessaires pour obtenir la boule noire lors de la deuxième fois où la première étape est réalisée. *Bien entendu, N_1 et N_2 sont alors **indépendantes**.*

On pose à présent $N = \max(N_1, N_2)$, la plus grande des deux valeurs.

A l'issue de ce protocole, X est définie comme auparavant, comme le nombre de fois où la boule noire a été obtenue dans cette seconde série de n tirages, n étant la valeur de N.

(7) Pour les mêmes raisons que précédemment, N_1 et N_2 suivent toutes deux la même loi géométrique de paramètre $1/4$. Il suit que

$$P(N_1 \leq n) = \sum_{k=1}^{n} P(N_1 = k) = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} = \frac{1}{4} \times \frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n}{1-\frac{3}{4}} = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

(8) On utilise la définition du maximum et le fait que N_1 et N_2 suivent la même loi. Le maximum de deux quantités est inférieur ou égal à n **si et seulement si** chacune de ces deux quantité est inférieure ou égale à n. Ainsi,

$$\begin{aligned} P(N \leq n) &= P([N_1 \leq n] \cap [N_2 \leq n]) \\ &= P(N_1 \leq n)P(N_2 \leq n) \qquad \text{(par indépendance)} \\ &= \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right)^2. \end{aligned}$$

(9) Soit $n \geq 2$. Comme $[N = n] \cup [N \leq n-1] = [N \leq n]$ et que l'union est disjointe, on a

$$P(N = n) = P(N \leq n) - P(N \leq n-1).$$

Si $n = 1$, $P(N \leq n-1) = P(N \leq 0) = 0$ et $P(N = 1) = P(N \leq 1)$. On a bien répondu à la question.

(10) On obtient

$$\begin{aligned} P(N=n) &= P(N\leq n)-P(N\leq n-1)\\ &= \left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)^2-\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right)^2\\ &= 1-2\left(\frac{3}{4}\right)^n+\left(\frac{9}{16}\right)^n-1+2\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}-\left(\frac{9}{16}\right)^{n-1}\\ &= \left(2-\frac{6}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}-\left(1-\frac{9}{16}\right)\left(\frac{9}{16}\right)^{n-1}\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}-\frac{7}{16}\left(\frac{9}{16}\right)^{n-1}, \end{aligned}$$

ce qui est bien la formule attendue.

(11) Comme précédemment, N admet une espérance si la série de terme général $nP(N=n)$ converge. Celle ci est clairement combinaison de séries géométriques dérivées (de raisons $3/4$ et $9/16$) convergentes. Donc N admet une espérance et

$$\begin{aligned} E(N) &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}-\frac{7}{16}\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{9}{16}\right)^{n-1}\\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{(1-\frac{3}{4})^2}-\frac{7}{16}\frac{1}{(1-\frac{9}{16})^2}\\ &= 8-\frac{16}{7}\\ &= \frac{40}{7}\sim 5,7. \end{aligned}$$

Partie IV : une démonstration de la formule admise

(12) La formule du triangle de Pascal donne

$$\binom{j}{i}+\binom{j}{i+1}=\binom{j+1}{i+1}.$$

(13) Cette formule est un classique. Elle figurait sur le cahier de vacances et on la retrouve notamment dans le sujet **ECRICOME 2017**). On peut procéder par récurrence ou à l'aide d'une somme télescopique, ce qu'on va finalement faire ici

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^{q}\binom{k}{m} &= \sum_{k=m}^{q}\left(\binom{k+1}{m+1}-\binom{k}{m+1}\right)\\ &= \binom{q+1}{m+1}-\binom{m}{m+1}\\ &= \binom{q+1}{m+1}. \end{aligned}$$

(14) Soit k un entier naturel non nul. et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires, mutuellement indépendantes, suivant toutes la loi géométrique de paramètre $1-x$, avec $x\in]0;1[$, et on pose

$$S_k=\sum_{n=1}^{k}X_n=X_1+X_2+\cdots+X_k.$$

(a) Pour chaque $i\in[\![1;k]\!]$, $X_i(\omega)\geq 1$ donc $S_k(\omega)\geq k$. Chaque X_i pouvant prendre des valeurs arbitrairement grandes, c'est aussi le cas de S_k. Ainsi, $S_k(\Omega)=[\![k;+\infty[\![$.

Il est clair que, si $j \geq n$,
$$P(S_k = j \cap S_{k+1} = n) = 0.$$
Observons ensuite que
$$S_{k+1} = S_k + X_{k+1},$$
et, par le lemme des coalitions (bien connu des nos khubes et qui arrive au Chapitre 6 pour les autres qui l'admettront sans se plaindre d'ici là), les variables S_k et X_{k+1} sont indépendantes (S_k ne dépend que des X_i pour $i \in [\![1, k]\!]$ toutes indépendantes de X_{k+1}). En appliquant, pour $n \geq k+1$, la formule des probabilités totales au s.c.e $\{(S_k = j) : \ j \geq k\}$, on obtient

$$\begin{aligned}
P(S_{k+1} = n) &= \sum_{j=k}^{+\infty} P(S_k = j \cap S_{k+1} = n) = \sum_{j=k}^{n-1} P(S_k = j \cap S_{k+1} = n) \\
&= \sum_{j=k}^{n-1} P(S_k = j \cap X_{k+1} = n-j) \\
&= \sum_{j=k}^{n-1} P(S_k = j) P(X_{k+1} = n-j) \qquad \text{par indépendance,}
\end{aligned}$$

ce qui est la formule attendue.

(b) On procède donc par récurrence.

- <u>initialisation:</u> pour $k = 1$, on a, pour tout $n \geq 1$,
$$P(S_1 = n) = P(X_1 = n) = x^{n-1}(1-x) = \binom{n-1}{0}(1-x)^1 x^{n-1},$$
et la formule est vérifiée.

- <u>hérédité:</u> Supposons la propriété vraie pour un certain $k \geq 1$. Soit $n \geq k+1$, on a
$$\begin{aligned}
P(S_{k+1} = n) &= \sum_{j=k}^{n-1} P(S_k = j) P(X_{k+1} = n-j) \\
&= \sum_{j=k}^{n-1} \binom{j-1}{k-1}(1-x)^k x^{j-k} x^{n-j-1}(1-x) \\
&= (1-x)^{k+1} x^{n-(k+1)} \sum_{j=k}^{n-1} \binom{j-1}{k-1} \\
&= (1-x)^{k+1} x^{n-(k+1)} \sum_{\ell=k-1}^{n-2} \binom{\ell}{k-1} \\
&= (1-x)^{k+1} x^{n-(k+1)} \binom{n-1}{k},
\end{aligned}$$
ce qui est bien la formule au rang $k+1$ et termine la récurrence.

(c) Comme $S_k(\Omega) = [\![k; +\infty[\![$, on a
$$\begin{aligned}
\sum_{n=k}^{+\infty} P(S_n = k) = 1 &\iff \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n-1}{k-1}(1-x)^k x^{n-k} = 1 \\
&\iff \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n-1}{k-1} x^{n-k} = \frac{1}{(1-x)^k}.
\end{aligned}$$

$$\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n-1}{k-1}x^{n-k}=\frac{1}{(1-x)^k}.$$

(d) Comme

$$\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n-1}{k-1}x^{n-k}=x^{-k}\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n-1}{k-1}x^{n},$$

la question précédente donne

$$\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n-1}{k-1}x^{n}=\frac{x^k}{(1-x)^k}.$$

En posant $j=n-1$, on obtient

$$\sum_{j=k-1}^{+\infty}\binom{j}{k-1}x^{n+1}=\frac{x^k}{(1-x)^k}\iff\sum_{j=k-1}^{+\infty}\binom{j}{k-1}x^{n}=\frac{x^{k-1}}{(1-x)^k}.$$

Maintenant, on remplace $k-1$ par k (et donc k par $k+1$), et on obtient

$$\sum_{j=k}^{+\infty}\binom{j}{k}x^{n}=\frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}\qquad\text{OUF!}$$

Bonus

La fonction taille, qui divise un nombre x par différentes puissances de 10 consécutives permet de renvoyer le nombre de chiffres qui composent le nombre x si celui-ci est entier.
La commande `range(n, 0, -1)` dans la boucle `for` permet de faire une boucle *descendante*, on stocke les différents chiffres qui forment le nombre entier x dans une liste `L` puis on crée un nouveau nombre `y` en multipliant le chiffre initialement à la position j par la puissance de 10 correspondant à la position $n-j$ (où n est la taille du nombre). Il s'agit donc d'inverser l'ordre des chiffres du nombre entier x, c'est un des programmes qu'il était demandé d'écrire dans le cahier de vacances.

```
import numpy as np

def taille(x):
    l=0
    while x/(10**l)>=1:
        l=l+1
    return l

def mystere(x):
    n=taille(x)
    L=np.zeros(n)
    for k in range(n, 0, -1):
        L[k-1]=np.floor(x/(10**(k-1)))
        x=x-L[k-1]*10**(k-1)
    y=0
    for j in range(0, n):
        y+=L[j]*10**(n-1-j)
    return y
```