Devoir surveillé n°1

Samedi 24 Septembre
Durée : 4 heures

Les questions précédées de $(*)$ sont réservées aux khubes.

Exercice 1

Partie 1 : Études de deux fonctions

(1) Soit N la fonction définie sur l'intervalle $[0,1[$, à valeurs réelles, telle que :

$$N(x) = x^2 - 2x - 2(1-x)\ln(1-x).$$

(a) Montrer que la fonction N est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1[$.
(b) Montrer que pour tout $x \in [0,1[$, on a : $\ln(1-x) \leq -x$.
(c) Montrer que pour tout $x \in [0,1[$, on a : $N'(x) \leq 0$.
(d) En déduire le signe de N sur l'intervalle $[0,1[$.

(2) Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0,1[$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-2(x+\ln(1-x))}{x^2}, & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

(a) Déterminer un équivalent de $f(x)$ lorsque $x \to 1$.
En déduire la limite de $f(x)$ lorsque $x \to 1$.
(b) Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 2 de $\ln(1-x)$.
(c) En déduire $\lim_{x\to 0} f(x)$.
(d) En déduire que la fonction f est continue sur $[0,1[$.
(e) Montrer que f est dérivable sur $]0,1[$ et que pour tout $x \in]0,1[$, on a :

$$f'(x) = -2\frac{N(x)}{x^3(1-x)}.$$

☞ On **admet** qu'au voisinage de 0, on a : $\ln(1-x) + x + \dfrac{x^2}{2} \sim -\dfrac{x^3}{3}$.

(f) Montrer alors que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 2/3$.
(g) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $[0,1[$, limites comprises.
(h) Tracer soigneusement l'allure de la courbe représentative de la fonction f. On donnera l'équation de la tangente en 0 et on la tracera.

(i) À l'aide de la formule de Taylor-Young en 0 au rang 3 donnée ci-dessous, que l'on admet être licite pour une fonction φ de classe $\mathcal{C}^3$ au voisinage de 0, démontrer l'équivalence admise ci-dessus.

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \varphi'(0)x + \frac{\varphi''(0)}{2!}x^2 + \frac{\varphi'''(0)}{3!}x^3 + o(x^3), \qquad x \to 0.$$

Partie 2 : Résolutions d'équations

(4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution, notée u_n sur $[0,1[$. Donner la valeur de u_1.

(5) L'équation $f(x) = x$ admet-elle une solution sur $[0,1[$?

Partie 3 : Preuve de Taylor-Young à l'ordre n pour une fonction $\mathcal{C}^{n+1}$

(6) Soit $x \in]0;1[$. On veut montrer que, si φ est une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[0,1[$, alors

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{n} \varphi^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + \int_0^x \varphi^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\mathrm{d}t,$$

où $\varphi^{(0)} = \varphi$ et, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\varphi^{(k)}$ désigne la dérivée $k-$ième de φ.
On va procéder par récurrence.

(a) Vérifier le résultat pour $n = 0$.

(b) On suppose le résultat vrai au rang n et on considère une fonction φ de classe $\mathcal{C}^{n+2}$ sur $[0;1[$. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties que

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \varphi^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + \int_0^x \varphi^{(n+2)}(t)\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{d}t.$$

(7) Exprimer, en fonction de n et de x, la quantité $R_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\mathrm{d}t$.

(8) Montrer (à l'aide de l'inégalité triangulaire et d'une propriété du cours concernant les fonctions continues sur un intervalle fermé et borné) que, si $x \in [0;1/2]$, il existe une constante $\kappa \geq 0$ telle que,

$$\left|\int_0^x \varphi^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\mathrm{d}t\right| \leq \kappa R_n(x).$$

En déduire que

$$\int_0^x \varphi^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\mathrm{d}t = o(x^n), \qquad x \to 0.$$

(9) Expliciter alors le développement limité à l'ordre n en 0 pour une fonction φ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ au voisinage de 0.

Exercice 2

Partie I : Cours en bourse d'une action

On s'intéresse aux **variations** journalières d'une action sur un marché financier, qu'on suppose aléatoires. On introduit, pour $j \in \mathbb{N}$, la variable aléatoire X_j correspondant à l'état de la variation de l'action le jour j. Naturellement, au début de l'observation, l'action n'a pas encore varié et on a $X_0 = 0$. On suppose de plus que, chaque jour, le cours de l'action:

- monte d'une unité $(+1)$ avec une probabilité p $(0 < p < 1)$;
- ou bien descend d'une unité (-1) avec la probabilité $q = 1 - p$.

On note X_{2n} le cours constaté le $2n^{ième}$ jour suivant le début de l'observation.

Par exemple, si $n = 2$ et que le cours a baissé les trois premiers jours et monté le quatrième jour, on a $X_4 = -1 - 1 - 1 + 1 = -2$.

Enfin, on note

$$p_n = P(X_{2n} \geq 0)$$

et on s'intéresse à l'évolution de p_n lorsque n devient grand, c'est à dire qu'on cherche à estimer la probabilité, après un grand nombre (pair) de jours, que le cours de l'action soit en hausse.

(1) **Simulation sous Python.**

(a) Recopier et compléter la fonction ci-dessous qui renvoie une simulation de X_{2n}.

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

def simul_X_2(n, p) :
    x=0
    for ................. :
        if .............. :
            ............
        else :
            ............
    return x
```

(b) On ajoute le code de la fonction suivante. Que fait-elle ? Préciser notamment ce que contiennent les variables `L` et `c`.

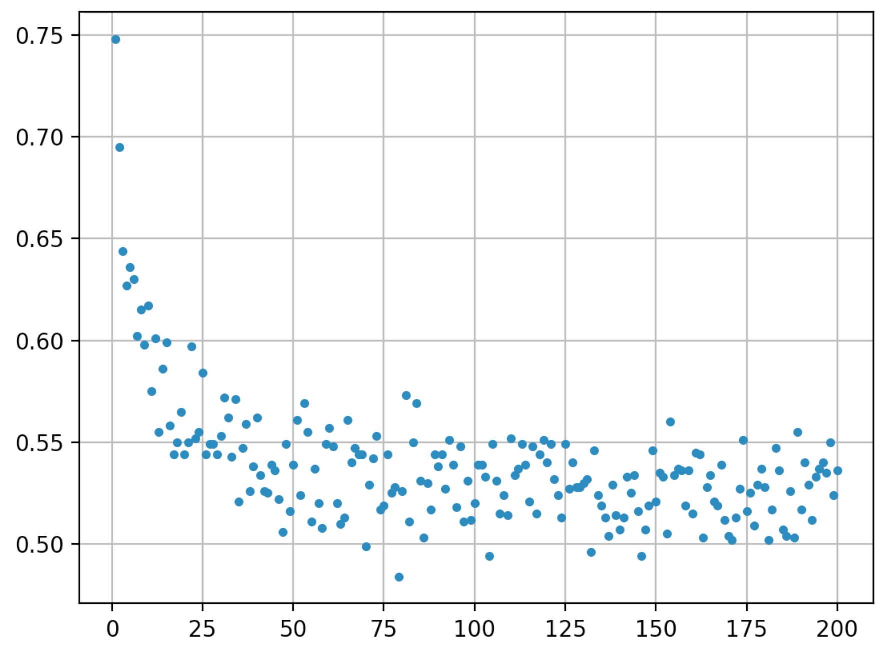
```
def mystere(n) :
    L=[ ]
    c=0
    for k in range(1000) :
        L.append(simul_X_2(n, p))
    for j in range(1000) :
        if L[j] >=0 :
            c=c+1
    return c/1000
```

(c) Les commandes ci-dessous permettent d'obtenir la figure ci-après. Émettre une conjecture.

```
import matplotlib.pyplot as plt

p=1/2
N=[k for k in range(1, 201)]
P=[mystere(k) for k in N]
plt.grid()
plt.plot(N, P, '.')
plt.show()
```

Affichage Python



(2) Déterminer $X_{2n}(\Omega)$.

(3) On note Y_{2n} le nombre de jours (durant les $2n$ jours d'observation) où l'action a monté, et Z_{2n} le nombre de ceux où elle a baissé.

(a) Quel lien y a-t-il entre Y_{2n} et Z_{2n}?
(b) Expliciter les lois de Y_{2n} et Z_{2n} et préciser leurs espérances et leurs variances.
(c) $(*)$ Que vaut $\operatorname{cov}(Y_{2n}, Z_{2n})$? Commenter.

(4) Quelle autre relation lie X_{2n}, Y_{2n} et Z_{2n}? En déduire l'expression de $E(X_{2n})$. Interpréter le cas particulier $p = 1/2$.

(5) Montrer que, pour tout $k \in [\![-n; n]\!]$,

$$P(X_{2n} = 2k) = \binom{2n}{n+k} p^{n+k} q^{n-k}.$$

En déduire une expression de p_n à l'aide d'une somme qu'on ne cherchera pas à calculer.

Partie II : Des coefficients binomiaux

On considère la suite (S_n) définie, pour $n \in \mathbb{N}^*$, par

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{2n}{n+i} = \binom{2n}{n} + \binom{2n}{n+1} + \cdots + \binom{2n}{2n}.$$

(6) (a) Calculer S_1, S_2, S_3.

(b) On rappelle qu'en Python, la commande `np.prod(liste)` permet d'obtenir le produit des valeurs de la `liste` prise en argument.

(i) Écrire $\binom{2n}{n+i}$ comme un quotient de produits.

(ii) En déduire une fonction Python d'en tête `def suite_S(n) :` qui renvoie la valeur de S_n.

(c) Justifier que
$$\sum_{i=0}^{2n} \binom{2n}{i} = 2^{2n}.$$

(d) En déduire que
$$S_n = 2^{2n-1} + \frac{1}{2}\binom{2n}{n}.$$

On commencera par montrer que
$$\sum_{i=0}^{n} \binom{2n}{i} + \binom{2n}{n} = 2S_n.$$

(7) Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_p = \binom{2p}{p} 2^{-2p}$.

(a) Montrer que, pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$,
$$u_{p+1} = \frac{2p+1}{2p+2} u_p.$$

(b) En déduire, par récurrence, que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,
$$0 \leq u_p \leq \frac{1}{\sqrt{2p+1}}.$$

(c) En déduire alors la limite de u_p lorsque $p \to +\infty$.

(8) On revient aux variables aléatoires de la Partie 1. On suppose, dans cette question que $p = 1/2$.
On rappelle que $p_n = P(X_{2n} \geq 0)$.
À l'aide de la Question (5), exprimer p_n à l'aide de S_n puis montrer que
$$p_n = \frac{1}{2} + \binom{2n}{n} 2^{-(2n+1)}.$$

Que valent $p_1,\ p_2,\ p_3$?
Que se passe-t-il quand n devient grand ? Comparer avec la conjecture émise précédemment.

Exercice 3

À tout couple (a, b) de deux réels, on associe la matrice $M(a, b)$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par:
$$M(a,b) = \begin{pmatrix} a+2b & -b & -2b \\ 2b & a-b & -4b \\ -b & b & a+3b \end{pmatrix}$$

On désigne par E l'ensemble des matrices $M(a, b)$ où a et b décrivent $\mathbb{R}$. Ainsi $E = \{M(a,b)\ ;\ a, b \in \mathbb{R}\}$.
On note $I = M(1, 0)$ la matrice identité et on introduit les deux matrices A et P suivantes :
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Justifier que $A \in E$.

(2) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ en montrant qu'il s'agit du sous-espace vectoriel engendré par deux matrices que l'on précisera. La famille constituée des deux matrices en question est-elle libre? Quelle est la dimension de E?

(3) On dispose du code Python suivant dont l'exécution permet l'affichage ci-contre

```
import numpy as np

A=np.array([[2, -1, -2], [2, -1, -4], [-1, 1, 3]])
B=A-np.eye(3,3)
C=A-2*np.eye(3,3)
print(B.dot(B.dot(C)))
```

Affichage Python

```
>>>
[[0.  0.  0.]
[0.  0.  0.]
[0.  0.  0.]]
```

(a) Montrer que A est inversible et exprimer A^{-1} comme combinaison linéaire de I, A et A^2.
(b) $(*)$ Quelles sont les valeurs propres possibles de A?

(4) On note : $E_1(A) = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) : \; AX = X\}$ et $E_2(A) = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) : \; AX = 2X\}$.

(a) Déterminer une base (V, W) de $E_1(A)$.
(b) Déterminer une base (U) de $E_2(A)$.
(c) $(*)$ Quel est alors le spectre de A? La matrice est-elle diagonalisable?
(d) Montrer que la famille $\mathcal{B}' = (U, V, W)$ forme une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

(5) Montrer que P est inversible et déterminer l'inverse P^{-1} par un pivot de Gauss.

(6) Vérifier que la matrice $D = P^{-1}AP$ est diagonale et l'expliciter.

(7) Prouver que la matrice $P^{-1}M(a,b)P$ est une matrice diagonale que l'on notera $D(a,b)$ et que l'on exprimera en fonction des matrices I et D.

(8) (a) Montrer que $M(a,b)$ est inversible si et seulement si $D(a,b)$ est inversible.
(b) En déduire une condition nécessaire et suffisante portant sur a et b pour que $M(a,b)$ soit inversible.

(9) (a) Prouver que $[M(a,b)]^2 = I$ si et seulement si $[D(a,b)]^2 = I$.
(b) En déduire l'existence de quatre matrices $M(a,b)$ que l'on déterminera, vérifiant $[M(a,b)]^2 = I$.

(10) Déterminer une matrice B telle que $B^2 = A$.
On exprimera B à l'aide de la matrice P et d'une matrice diagonale à déterminer que l'on explicitera.