Math ECG 2. 2022-2023

Mathématiques Appliquées - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`
ENC Bessières, Paris 17e.

Devoir surveillé n°1

Samedi 24 Septembre
Solution

Les questions précédées de $(*)$ *sont réservées aux khubes.*

Exercice 1

Partie 1 : Études de deux fonctions

(1) Soit N la fonction définie sur l'intervalle $[0,1[$, à valeurs réelles, telle que :

$$N(x) = x^2 - 2x - 2(1-x)\ln(1-x).$$

(a) On voit que

- La fonction $x \mapsto 1-x$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1[$ à valeur sur $\mathbb{R}_+^*$ car $x < 1 \Longrightarrow 1-x > 0$.
- La fonction $t \mapsto \ln(t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Donc par composition, $x \mapsto \ln(1-x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1[$.
Finalement la fonction N est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1[$ comme somme et produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1[$.

(b) Posons $h : x \mapsto \ln(1-x) + x$.
h est dérivable sur $[0,1[$ et pour tout $x \in [0,1[$, on a :

$$h'(x) = \frac{-1}{1-x} + 1 = \frac{-x}{1-x} \leq 0 \qquad \text{car} \quad -x \leq 0 \;\text{ et }\; 1-x > 0 \;\text{ sur }\; [0,1[$$

Donc la fonction h est décroissant sur $[0,1[$. Elle est donc majorée par $h(0) = 0$.
Ainsi, pour tout $x \in [0,1[$, on a : $h(x) \leq 0$ soit

$$\forall x \in [0,1[, \qquad \ln(1-x) \leq -x.$$

(On aurait pu utiliser un argument de *convexité*. En effet, $x \mapsto \ln(1-x)$ est concave et sa courbe se situe au dessous de toutes ses tangentes, notamment $y = -x$, tangente en 0.)

(c) Pour tout $x \in [0,1[$, on a :

$$\begin{aligned} N'(x) &= 2x - 2 - 2\left[-\ln(1-x) + (1-x)\frac{-1}{1-x}\right] \\ &= 2x - 2 + 2\ln(1-x) + 2 \\ &= 2\left((x + \ln(1-x)\right) \leq 0 \end{aligned}$$

car d'après la question précédente, $\ln(1-x) \leq -x$ soit $x + \ln(1-x) \leq 0$ pour tout $x \in [0,1[$.
Finalement, on a

$$\forall x \in [0,1[, \qquad N'(x) \leq 0.$$

(d) D'après la question précédente, la fonction N est décroissant sur $[0,1[$. Elle est donc majorée par $N(0)=0$.
Ainsi, pour tout $x \in [0,1[$, on a bien $N(x) \leq 0$.

(2) Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0,1[$ par

$$f(x) = \begin{cases} -2\dfrac{x+\ln(1-x)}{x^2}, & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1, & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

(a) Comme $\ln(1-x) \to -\infty$, $x \to 1$ et que le reste du numérateur de f a une limite finie (comme le dénominateur), on a

$$f(x) \underset{x\to 1}{\sim} -2\ln(1-x) \underset{x\to 1}{\longrightarrow} +\infty.$$

(b) Au voisinage de 0, on a :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

donc

$$\ln(1-x) = -x - \frac{(-x)^2}{2} + o(x^2) = -x - \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

(c) Au voisinage de 0, on a donc :

$$\begin{aligned} x + \ln(1-x) &= x - x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \\ &= -\frac{x^2}{2} + o(x^2) \end{aligned}$$

et donc

$$x + \ln(1-x) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$$

On en déduit que au voisinage de 0^+ :

$$f(x) = -2\frac{x+\ln(1-x)}{x^2} \underset{x\to 0^+}{\sim} -2\frac{-\frac{x^2}{2}}{x^2} = 1$$

Ainsi, $f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} 1$ donc

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1.$$

(d) Notant que

- La fonction f est continue sur $]0,1[$ comme quotient de combinaisons de fonctions usuelles continues sur $]0,1[$ dont le dénominateur ne s'annule pas.
- De plus, $\lim_{x\to 0} f(x) = 1 = f(0)$ donc f est continue en 0.

Ainsi, la fonction f est continue sur $[0,1[$.

(e) On a déjà vu que $x \mapsto \ln(1-x)$ est dérivable sur $]0,1[$.
Donc, la fonction f est dérivable sur $]0,1[$ comme quotient de fonction dérivable sur $]0,1[$

car $x^2 \neq 0$. Pour tout $x \in \,]0,1[$, on a :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= -2\left[\frac{\left(1+\dfrac{-1}{1-x}\right)x^2-2x\left(x+\ln(1-x)\right)}{x^4}\right] = -2\left[\frac{\dfrac{-x^3-2x(1-x)\left(x+\ln(1-x)\right)}{1-x}}{x^4}\right] \\
&= -2\left[\frac{-x^2-2(1-x)\left(x+\ln(1-x)\right)}{x^3(1-x)}\right] = -2\left[\frac{-x^2-2x(1-x)-2(1-x)\ln(1-x)}{x^3(1-x)}\right] \\
&= -2\left[\frac{x^2-2x-2(1-x)\ln(1-x)}{x^3(1-x)}\right] \\
&= -2\frac{N(x)}{x^3(1-x)}
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $x \in \,]0,1[$, on a

$$f'(x) = -2\frac{N(x)}{x^3(1-x)}.$$

(f) Calculons le taux d'accroissement de f en 0. On a :

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \frac{-2\dfrac{x+\ln(1-x)}{x^2}-1}{x} = \frac{-2x-2\ln(1-x)-x^2}{x^3} \\
&= -2\left(\frac{\ln(1-x)+x+\dfrac{x^2}{2}}{x^3}\right)
\end{aligned}$$

Or, on a admis qu'au voisinage de 0, on a

$$\ln(1-x)+x+\frac{x^2}{2} \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^3}{3}.$$

Ainsi, on obtient par quotient d'équivalents

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \underset{x\to 0}{\sim} -2\frac{-\dfrac{x^3}{3}}{x^3} = \frac{2}{3}$$

Ainsi, f est dérivable en 0 et que $f'(0) = \dfrac{2}{3}$.

(g) On peut dresser le tableau.

x	0		1
$N(x)$		$-$	$\Vert$
$x^3(1-x)$		$+$	
$f'(x)$		$+$	$\Vert$
$f(x)$	1	$\nearrow$	$+\infty$ $\Vert$

(h) L'équation de la tangente en 0 est donnée par : $y = f'(0)(x-0)+f(0)$, soit d'après les calculs précédents $y = \dfrac{2}{3}x+1$.

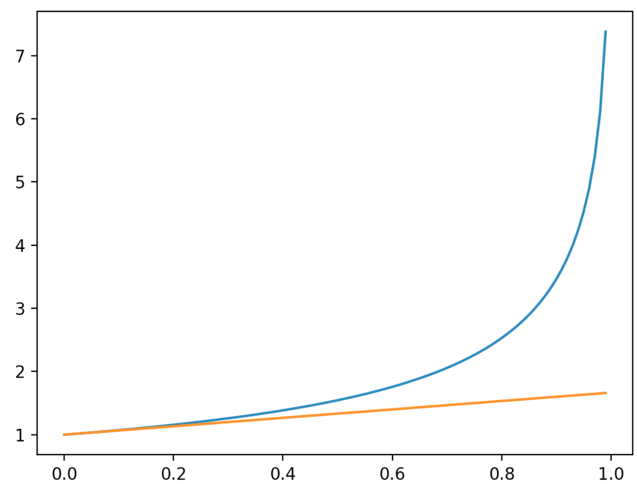
On joint la figure obtenue avec Python, dont le code est aussi, à titre pédagogique, fourni. C'est cadeau.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def f(x):
    if x==0:
        return 1
    return -2*(x+np.log(1-x))/(x**2)

X=np.linspace(0.01, 0.99, 100)
Y=[f(x) for x in X]
T=[2/3*x+1 for x in X] # tangente
plt.plot(X,Y)
plt.plot(X,T)
plt.show()
```

Affichage Python



(i) On applique la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 en 0 à la fonction $\varphi : x \mapsto \ln(1-x)$ qui est bien de classe $\mathcal{C}^3$ au voisinage de 0. On voit que

$$\begin{aligned}
\varphi(0) &= 0 \\
\varphi'(x) &= \frac{-1}{1-x} \\
\varphi'(0) &= -1 \\
\varphi''(x) &= \frac{-1}{(1-x)^2} \\
\varphi''(0) &= -1 \\
\varphi'''(x) &= \frac{-2}{(1-x)^3} \\
\varphi'''(0) &= -2
\end{aligned}$$

Donc, au voisinage de 0,

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{2}{6}x^3 + o(x^3) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

ou encore

$$\ln(1-x)+x+\frac{x^2}{2}\underset{x\to 0}{\sim}-\frac{x^3}{3}.$$

Partie 2 : Résolutions d'équations

(4) On sait que:

- La fonction f est continue et strictement croissante sur $[0,1[$ donc elle réalise une bijection de $[0,1[$ sur $[1,+\infty[$ (d'après les calculs de limites plus haut).
- De plus, $n\in\mathbb{N}^*$ donc $n\in[1,+\infty[$.

Donc, d'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x)=n$ admet une unique solution $u_n\in[0,1[$. Pour $n=1$, comme $f(0)=1$, on a $u_1=0$.

(5) Graphiquement, cette équation n'a pas de solution (tracer la droite $y=x$ sur le même graphique; il n'y a pas de point d'intersection).
Plus rigoureusement, d'après le tableau de variations, on a pour tout $x\in[0,1[$:

$$f(x)\geq 1$$

Mais comme $x<1$, on obtient :

$$f(x)\geq 1>x \quad \text{soit} \quad f(x)>x \quad \text{(inégalité stricte)}$$

Ainsi, l'équation $f(x)=x$ n'admet pas de solution sur $[0,1[$.

Partie 3 : Preuve de Taylor-Young à l'ordre n pour une fonction $\mathcal{C}^{n+1}$

(6) Soit $x\in]0;1[$. On veut montrer que, si φ est une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[0,1[$, alors

$$\varphi(x)=\sum_{k=0}^{n}\varphi^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!}+\int_0^x\varphi^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\mathrm{d}t,$$

où $\varphi^{(0)}=\varphi$ et, pour $k\in\mathbb{N}^*$, $\varphi^{(k)}$ désigne la dérivée $k-$ième de φ.
On va procéder par récurrence.

(a) Pour $n=0$, on a

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{0}\varphi^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!}+\int_0^x\varphi^{(0+1)}(t)\frac{(x-t)^0}{0!}\mathrm{d}t &= \varphi(0)+\int_0^x\varphi'(t)\mathrm{d}t\\ &= \varphi(0)+[\varphi(t)]_0^x=\varphi(0)+\varphi(x)-\varphi(0)\\ &= \varphi(x),\end{aligned}$$

et la relation est bien vérifiée.

(b) On suppose le résultat vrai au rang n et on considère une fonction φ de classe $\mathcal{C}^{n+2}$ sur $[0;1[$.
On pose

$$\left\{\begin{array}{rcl} u'(t) &=& \frac{(x-t)^n}{n!}\\ v(t) &=& \varphi^{(n+1)}(t)\end{array}\right. \rightsquigarrow \left\{\begin{array}{rcl} u(t) &=& -\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\\ v'(t) &=& \varphi^{(n+2)}(t)\end{array}\right.$$

Comme φ est de classe $\mathcal{C}^{n+2}$ sur $[0;1[$, les fonctions u et v sont notamment de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;x]$ rendant cette intégration par parties licite. Ceci donne

$$\begin{aligned}\int_0^x\varphi^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\mathrm{d}t &= \left[-\varphi^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_0^x+\int_0^x\varphi^{(n+2)}(t)\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{d}t\\ &= \varphi^{(n+1)}(0)\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}+\int_0^x\varphi^{(n+2)}(t)\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Mais alors

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \sum_{k=0}^{n} \varphi^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + \int_0^x \varphi^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\mathrm{d}t \qquad (\text{ par HR})\\ &= \sum_{k=0}^{n} \varphi^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + \varphi^{(n+1)}(0)\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \int_0^x \varphi^{(n+2)}(t)\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{d}t\\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \varphi^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + \int_0^x \varphi^{(n+2)}(t)\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

ce qui est bien la formule au rang $n+1$ et termine la récurrence.

(7) C'est un calcul sans difficulté, le polynôme à primitiver ne pose pas de problème. Attention, la variable d'intégration est t et non x.

$$\begin{aligned}R_n(x) &= \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\mathrm{d}t\\ &= \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)n!}\right]_0^x\\ &= \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\end{aligned}$$

(8) Par hypothèse du texte, φ est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ ce qui signifie que $\varphi^{(n+1)}$ est continue sur $[0;1/2]$. Une fonction continue sur un intervalle fermé est bornée est elle-même bornée (et atteint ses bornes). C'est le théorème des valeurs intermédiaires (l'image d'un intervalle - fermé borné - est un intervalle - fermé borné). Par conséquent, il existe une constante $\kappa \geq 0$, telle que

$$\forall t \in \left[0; \frac{1}{2}\right], \qquad \left|\varphi^{(n+1)}(t)\right| \leq \kappa.$$

Par inégalité triangulaire, puis positivité de l'intégrale, il suit que, pour $x \in [0, 1/2]$,

$$\begin{aligned}\left|\int_0^x \varphi^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\mathrm{d}t\right| &\leq \int_0^x \left|\varphi^{(n+1)}(t)\right| \frac{(x-t)^n}{n!}\mathrm{d}t\\ &\leq \kappa\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\mathrm{d}t\\ &\leq \kappa R_n(x) = \kappa\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\end{aligned}$$

Il suit que

$$-\kappa\frac{x}{(n+1)!} \leq \frac{\int_0^x \varphi^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\mathrm{d}t}{x^n} \leq \kappa\frac{x}{(n+1)!}$$

et par théorème des gendarmes, ce quotient tend vers 0 lorsque $x \to 0$ ou encore

$$\int_0^x \varphi^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\mathrm{d}t = o(x^n), \qquad x \to 0.$$

(On peut passer à la limite car si $x \to 0$, $x \in [0, 1/2]$.)

(9) D'après la formule montrée par récurrence en début de partie et la question précédente, si φ est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ au voisinage de 0

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{n} \varphi^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + \int_0^x \varphi^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \varphi^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + o(x^n).$$

Exercice 2

Partie I : Cours en bourse d'une action

On s'intéresse aux **variations** journalières d'une action sur un marché financier, qu'on suppose aléatoires. On introduit, pour $j \in \mathbb{N}$, la variable aléatoire X_j correspondant à l'état de la variation de l'action le jour j. Naturellement, au début de l'observation, l'action n'a pas encore varié et on a $X_0 = 0$. On suppose de plus que, chaque jour, le cours de l'action:

- monte d'une unité $(+1)$ avec une probabilité p $(0 < p < 1)$;
- ou bien descend d'une unité (-1) avec la probabilité $q = 1 - p$.

On note X_{2n} le cours constaté le $2n^{ième}$ jour suivant le début de l'observation.

Par exemple, si $n = 2$ et que le cours a baissé les trois premiers jours et monté le quatrième jour, on a $X_4 = -1 - 1 - 1 + 1 = -2$.

Enfin, on note

$$p_n = P(X_{2n} \geq 0)$$

et on s'intéresse à l'évolution de p_n lorsque n devient grand, c'est à dire qu'on cherche à estimer la probabilité, après un grand nombre (pair) de jours, que le cours de l'action soit en hausse.

(1) **Simulation sous Python.**

(a) On utilise donc une boucle `for` pour parcourir les $2n$ jours. Avec probabilité p (ce qui se passe si `rd.rand() <=p`) on augmente de 1 et dans le cas contraire, on baisse de 1. Le programme est sans difficulté.

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

def simul_X_2(n, p) :
    x=0
    for k in range(2*n) :
        if rd.rand()<=p :
            x=x+1
        else :
            x=x-1
    return x
```

(b) La liste `L` contient, à l'issue de la boucle `for` 1000 réalisations de X_{2n}. Ensuite on parcourt cette liste et lorsque le terme est positif, la variable `c` (initialisée à 0) augmente de 1. Cette variable compte donc le nombre de réalisations où $X_{2n} \geq 0$. On renvoie $c/1000$, c'est donc la fréquence observée de $[X_{2n} \geq 0]$ soit une *estimation* (ou valeur approchée) de $P(X_{2n} \geq 0)$.

(c) On a représenté graphiquement l'évolution de l'estimation de $P(X_{2n} \geq 0)$ pour n variant de 1 en 200. Le nuage de points semble relativement concentré autour de 1/2. Il est raisonnable de conjecturer que, dans le cas $p = 1/2$, on a

$$\lim_{n \to +\infty} P(X_{2n} \geq 0) = \frac{1}{2}.$$

(2) Dans le pire des cas, on peut perdre 1 euro chaque jour pendant $2n$ jours et dans le meilleur des cas, gagner 1 euro chaque jour. Toutes les situations intermédiaires sont possibles, donc

$$X_{2n}(\Omega) = [\![-2n; 2n]\!].$$

(3) On note Y_{2n} le nombre de jours (durant les $2n$ jours d'observation) où l'action a monté, et Z_{2n} le nombre de ceux où elle a baissé.

(a) Les $2n$ jours se répartissent entre ceux où l'action monte et ceux où elle descend. Il est alors clair que

$$Y_{2n} + Z_{2n} = 2n.$$

(b) Y_{2n} (resp. Z_{2n}) compte, parmi les $2n$ répétitions (chaque jour on répète le processus), le nombre de succès (l'action monte - resp. l'action baisse). Les évolutions étant indépendantes chaque jour, on a un schéma de Bernoulli répété de manière indépendante et donc des lois binomiales:

$$Y_{2n} \hookrightarrow \mathcal{B}(2n, p), \qquad Z_{2n} \hookrightarrow \mathcal{B}(2n, q).$$

Le cours donne directement

$$E(Y_{2n}) = 2np, \quad V(Y_{2n}) = 2npq, \quad E(Z_{2n}) = 2nq, \quad V(Z_{2n}) = 2nqp.$$

(c) Comme $Z_{2n} = 2n - Y_{2n}$, on a

$$\mathrm{Cov}(Y_{2n}, Z_{2n}) = \mathrm{Cov}(Y_{2n}, 2n - Y_{2n}) = 0 - \mathrm{Cov}(Y_{2n}, Y_{2n}) = -V(Y_{2n}) = -2npq.$$

La covariance étant négative, les deux variables évoluent de manière opposée, ce qui est assez intuitif. Plus le nombre de jours où l'action monte est grand, plus celui où elle baisse est petit...

(4) Chaque jour où l'action monte, on gagne 1 euro, il y a Y_{2n} jours où elle monte. Pour les Z_{2n} jours restant on perd 1 euros donc on "gagne" -1 euro. Au final, on a clairement

$$X_{2n} = Y_{2n} - Z_{2n}.$$

Par linéarité de l'espérance, on a donc

$$E(X_{2n}) = E(Y_{2n} - Z_{2n}) = E(Y_{2n}) - E(Z_{2n}) = 2np - 2nq = 2n(p - q).$$

Si $p = q = 1/2$, cette espérance est nulle, ce qui n'est pas surprenant. S'il est équiprobable que l'action monte ou descende chaque jours, après un nombre pair de jours, en son cours est en moyenne nul.

(5) Soit $k \in [\![-n; n]\!]$. Remarquant que $X_{2n} = Y_{2n} - Z_{2n} = 2Y_{2n} - 2n$, et que $n + k \in [\![0; 2n]\!]$, on a

$$P(X_{2n} = 2k) \quad = \quad P(2Y_{2n} - 2n = 2k) = P(Y_{2n} = n + k) = \binom{2n}{n+k} p^{n+k} q^{n-k},$$

ce qui permet ensuite d'écrire

$$p_n = P(X_{2n} \geq 0) = \sum_{k=0}^{n} P(X_{2n} = 2k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{n+k} p^{n+k} q^{n-k},$$

qui est bien la formule attendue.

Partie II : Des coefficients binomiaux

On considère la suite (S_n) définie, pour $n \in \mathbb{N}^*$, par

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{2n}{n+i} = \binom{2n}{n} + \binom{2n}{n+1} + \cdots + \binom{2n}{2n}.$$

(6) (a) D'après la définition de S_n, on a

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{i=0}^{1} \binom{2}{1+i} = \binom{2}{1} + \binom{2}{2} \\ &= 2+1=3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{i=0}^{2} \binom{4}{2+i} = \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} \\ &= 6+4+1=11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_3 &= \sum_{i=0}^{3} \binom{6}{3+i} = \binom{6}{3} + \binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6} \\ &= 20+15+6+1=42. \end{aligned}$$

(b) On rappelle qu'en Python, la commande `np.prod(liste)` permet d'obtenir le produit des valeurs de la `liste` prise en argument.

(i) Par définition,

$$\binom{2n}{n+i} = \frac{(2n)!}{(n+i)!(n-i)!} = \frac{\prod\limits_{j=n-i+1}^{2n} j}{\prod\limits_{j=1}^{n+i} j}.$$

(ii) Ceci permet d'écrire, sans difficulté

```
def suite_S(n):
  y=0
  for k in range(n):
    y=y+np.prod(range(n-i+1,2*n+1))/np.prod(range(1,n+i+1))
  return y
```

(c) D'après la formule du binôme de Newton, on a

$$\sum_{i=0}^{2n} \binom{2n}{i} = \sum_{i=0}^{2n} \binom{2n}{i} 1^i 1^{2n-i} = (1+1)^{2n} = 2^{2n}.$$

(d) Par définition,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=0}^{n} \binom{2n}{n+i} = \sum_{j=n}^{2n} \binom{2n}{j} && \text{(d'une part)} \\ &= \sum_{i=0}^{n} \binom{2n}{n+i} = \sum_{i=0}^{n} \binom{2n}{n-i} && \text{(par symétrie)} \\ &= \sum_{i=0}^{n} \binom{2n}{n-i} = \sum_{j=0}^{n} \binom{2n}{j} \end{aligned}$$

On a donc

$$2S_n = S_n + S_n = \sum_{j=0}^{n} \binom{2n}{j} + \sum_{j=n}^{2n} \binom{2n}{j} = \sum_{j=0}^{2n} \binom{2n}{j} + \binom{2n}{n}.$$

Ceci permet, avec la question précédente,

$$2S_n = 2^{2n} + \binom{2n}{n},$$

ce qui donne bien, en divisant par 2,

$$S_n = 2^{2n-1} + \frac{1}{2}\binom{2n}{n}.$$

(7) Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_p = \binom{2p}{p} 2^{-2p}$.

(a) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\begin{aligned}
\frac{u_{p+1}}{u_p} &= \frac{\binom{2(p+1)}{p+1} 2^{-2(p+1)}}{\binom{2p}{p} 2^{-2p}} \\
&= \frac{[2(p+1)]!p!p!}{2^2(p+1)!(p+1)!(2p)!} \\
&= \frac{(2p+2)(2p+1)}{2(p+1)2(p+1)} \\
&= \frac{2p+1}{2p+2},
\end{aligned}$$

ce qu'on voulait.

(b) On raisonne, comme demandé, par récurrence sur $p \in \mathbb{N}^*$.

- initialisation. Pour $p = 1$, on a
$$0 \leq u_1 = \binom{2}{1} 2^{-2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$$
car $\sqrt{3} \leq \sqrt{4} = 2$.

- hérédité. Supposons que, pour un certain $p \in \mathbb{N}^*$, on ait
$$0 \leq u_p \leq \frac{1}{\sqrt{2p+1}}.$$
Alors, d'après la question précédente
$$\begin{aligned}
u_{p+1} &= \frac{2p+1}{2p+2} u_p \leq \frac{2p+1}{2p+2} \frac{1}{\sqrt{2p+1}} = \sqrt{\frac{(2p+1)(2p+1)}{(2p+2)(2p+2)(2p+1)}} \\
&\leq \sqrt{\frac{2p+1}{(2p+2)^2}}.
\end{aligned}$$
Or,
$$\begin{aligned}
\frac{2p+1}{(2p+2)^2} \leq \frac{1}{2p+3} &\iff (2p+1)(2p+3) \leq (2p+2)^2 \\
&\iff 4p^2 + 8p + 3 \leq 4p^2 + 8p + 4 \\
&\iff 3 \leq 4,
\end{aligned}$$
ce qui est vrai. On a donc la majoration voulue et la récurrence est terminée.

(c) Par théorème des gendarmes, on peut donc conclure que

$$\lim_{p \to +\infty} u_p = 0.$$

(8) On revient aux variables aléatoires de la Partie 1. On suppose, dans cette question que $p = 1/2$. On rappelle que $p_n = P(X_{2n} \geq 0)$.
On a, d'après la question précédente

$$\begin{aligned}
p_n &= P(X_{2n} \geq 0) = \sum_{k=0}^{n} P(X_{2n} = 2k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{n+k} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+k} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{n+k} = 2^{-2n} S_n \\
&= 2^{-2n} \left(2^{2n-1} + \frac{1}{2}\binom{2n}{n}\right) && \text{(d'après la Question } (6d)\text{)} \\
&= \frac{1}{2} + \binom{2n}{n} 2^{-(2n+1)},
\end{aligned}$$

ce qu'on voulait.
On utilise les calculs ci-avant.

$$\begin{aligned}
p_1 &= 2^{-2} S_1 = \frac{3}{4}, \\
p_2 &= 2^{-4} S_2 = \frac{11}{16} \\
p_3 &= 2^{-6} S_3 = \frac{42}{64} = \frac{21}{32}.
\end{aligned}$$

On observe aussi que

$$p_n = \frac{1}{2}\left(1 + u_n\right).$$

En particulier,

$$\lim_{n \to +\infty} p_n = \frac{1}{2},$$

ce qu'on avait conjecturé à l'aide de Python.

Exercice 3

☞ *Cet exercice est inspiré (mais adapté et modifié) par une annale du sujet* **ECRICOME 2008**.

À tout couple (a, b) de deux réels, on associe la matrice $M(a, b)$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par:

$$M(a,b) = \begin{pmatrix} a+2b & -b & -2b \\ 2b & a-b & -4b \\ -b & b & a+3b \end{pmatrix}$$

On désigne par E l'ensemble des matrices $M(a, b)$ où a et b décrivent $\mathbb{R}$. Ainsi $E = \{M(a,b)\ ;\ a, b \in \mathbb{R}\}$.
On note $I = M(1, 0)$ la matrice identité et on introduit les deux matrices A et P suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) On observe qu'on peut clairement écrire $A = M(0, 1)$ donc $A \in E$.

(2) On remarque que pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $M(a,b) = aI + bA$ donc on peut écrire :

$$\begin{aligned} E &= \left\{M(a,b)\ ;\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\} \\ \text{donc}\quad E &= \left\{aI + bA\ ;\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\} \\ \text{donc}\quad E &= \mathrm{Vect}(I, A) \end{aligned}$$

Donc E est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par la famille (I, A). Donc E est un espace vectoriel. La famille (I, A) est une famille génératrice de E. De plus, cette famille est libre car composée de deux vecteurs non colinéaires, elle forme donc une base de E qui est de dimension 2.

(3) (a) Les commandes Python données permettent de calculer $(A-I)^2(A-2I)$ car la commande `np.eye(3,3)` correspond à la matrice identité (de taille 3). Le résultat affiché est la matrice nulle. Ainsi, cela nous évite de faire calcul mais on sait que

$$(A-I)^2(A-2I) = 0.$$

En développant cette égalité (ce qui est possible *via* identités remarquables car A et $-I$ ou $-2I$ commutent), on obtient

$$A^3 - 4A^2 + 5A - 2I = 0$$

ce qu'on réécrit comme

$$A \cdot \left(\frac{1}{2}A^2 - 2A + \frac{5}{2}I\right) = I$$

donc A est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{2}A^2 - 2A + \frac{5}{2}I.$$

(b) D'après ce qui précède, le polynôme $(X-1)^2(X-2)$ est annulateur de A. Ses racines (qui sont 1 et 2) sont donc les seules valeurs propres possibles pour A, ce qu'on ré-écrit

$$\mathrm{sp}(A) \subset \{1, 2\}.$$

(4) On note : $E_1(A) = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})\,|\,AX = X\}$ et $E_2(A) = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})\,|\,AX = 2X\}$.

(a) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a

$$\begin{aligned} X \in E_1(A) &\iff AX = X \\ &\iff \left\{\begin{array}{rcl} 2x - y - 2z &=& x \\ 2x - y - 4z &=& y \\ -x + y + 3z &=& z \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x - y - 2z &=& 0 \\ 2x - 2y - 4z &=& 0 \\ -x + y + 2z &=& 0 \end{array}\right. \\ &\iff x = y + 2z \\ &\iff X = \begin{pmatrix} y + 2z \\ y \\ z \end{pmatrix} = yV + zW, \end{aligned}$$

où on a posé

$$V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Donc $E_1(A) = \mathrm{Vect}(V, W)$ et la famille (V, W) est génératrice de $E_1(A)$. De plus, cette famille est clairement libre car composée de deux vecteurs non colinéaires, elle en forme donc une base.

(b) Avec la même méthode. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a

$$\begin{aligned}
X \in E_2(A) &\iff AX = 2X \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} 2x - y - 2z &=& 2x \\ 2x - y - 4z &=& 2y \\ -x + y + 3z &=& 2z \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} -y - 2z &=& 0 \\ 2x - 3y - 4z &=& 0 \\ -x + y + z &=& 0 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} -x + y + z &=& 0 \\ -y - 2z &=& 0 \\ -y - 2z &=& 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& y + z = -z \\ y &=& -2z \end{array}\right. \\
&\iff X = \begin{pmatrix} -z \\ -2z \\ z \end{pmatrix} = -zU,
\end{aligned}$$

où on a posé

$$U = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Donc $E_2(A) = \text{Vect}(U)$. De plus,cette famille est libre car composée d'un seul vecteur non nul et forme donc une base de $E_2(A)$.

(c) Avec ce qui précède, on conclut que 1 et 2 sont bien valeurs propres de A. On vient de déterminer les sous-espaces propres associés. On a

$$\sum_{\lambda \in \text{sp}(A)} \dim(E_\lambda(A)) = \dim(E_1(A)) + \dim(E_2(A)) = 2 + 1 = 3$$

donc A est diagonalisable.

(d) Montrons que la famille $\mathcal{B}' = (U, V, W)$ est libre dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$\begin{aligned}
aU + bV + cW = 0 &\iff \begin{pmatrix} a + b + 2c \\ 2a + b \\ -a + c \end{pmatrix} = 0 \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} a + b + 2c &=& 0 \\ 2a + b &=& 0 \\ -a + c &=& 0 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} a &=& 0 \\ b &=& -2a \\ c &=& a \end{array}\right. \iff a = b = c = 0
\end{aligned}$$

Donc la famille $\mathcal{B}' = (U, V, W)$ est une famille libre de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Comme elle est composée de 3 vecteurs de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dont la dimension est 3, elle en forme une base.

(5) On observe que P a pour colonnes les vecteurs (U, V, W). Les colonnes de la matrice formant une base de l'espace, on sait que cette matrice est inversible. Nos khûbes auront reconnu la matrice de passage de la base canonique vers la base (U, V, W). Déterminons son inverse par un pivot de

Gauss **total** simultané.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Ainsi,

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

(6) C'est un calcul.

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

qui est bien diagonale.

(7) On a vu que pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $M(a,b) = aI + bA$ donc on peut écrire :

$$D(a,b) = P^{-1}M(a,b)P = P^{-1}\left(aI + bA\right)P = aP^{-1}IP + bP^{-1}AP = aI + bD$$

Ainsi, la matrice $D(a,b)$ est une matrice diagonale (car I et D le sont) et on a : $D(a,b) = aI + bD$.

(8) (a) On a : $D(a,b) = P^{-1}M(a,b)P$ donc $M(a,b) = PD(a,b)P^{-1}$. Ainsi,

- Si $M(a,b)$ est inversible, alors $D(a,b) = P^{-1}M(a,b)P$ est inversible comme produit de matrices inversibles.
- Si $D(a,b)$ est inversible, alors $M(a,b) = PD(a,b)P^{-1}$ est inversible comme produit de matrices inversibles.

Finalement, $M(a,b)$ est inversible si et seulement si $D(a,b)$ est inversible.

(b)
- D'après la question précédente, $M(a,b)$ est inversible si et seulement si $D(a,b)$ est inversible.
- Or,

$$D(a,b) = \begin{pmatrix} a+2b & 0 & 0 \\ 0 & a+b & 0 \\ 0 & 0 & a+b \end{pmatrix}$$

est diagonale. Donc $D(a,b)$ est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont non nuls, donc si et seulement si $a + 2b \neq 0$ et $a \neq b$.

Finalement, $M(a,b)$ est inversible si et seulement si $a + 2b \neq 0$ et $a \neq b$.

(9) (a) On a :

$$\begin{aligned} [M(a,b)]^2 = I &\iff [PM(a,b)P^{-1}]^2 = I \\ &\iff PM(a,b)P^{-1}PM(a,b)P^{-1} = I \\ &\iff PD(a,b)P^{-1}PD(a,b)P^{-1} = I \\ &\iff PD(a,b)^2P^{-1} = I \\ &\iff D(a,b)^2 = P^{-1}IP \\ &\iff D(a,b)^2 = I \end{aligned}$$

(b) On a :

$$\begin{aligned} D(a,b)^2 = I &\iff \begin{pmatrix} a+2b & 0 & 0 \\ 0 & a+b & 0 \\ 0 & 0 & a+b \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} (a+2b)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (a+b)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (a+b)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} a+2b & = & 1 \\ a+b & = & 1 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{rcl} a+2b & = & 1 \\ a+b & = & -1 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{rcl} a+2b & = & -1 \\ a+b & = & 1 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{rcl} a+2b & = & -1 \\ a+b & = & -1 \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} (a+2b)^2 & = & 1 \\ (a+b)^2 & = & 1 \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & 1 \\ b & = & 0 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & -3 \\ b & = & 2 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & 3 \\ b & = & -2 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & -1 \\ b & = & 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Comme $[M(a,b)]^2 = I \iff D(a,b)^2 = I$, on a finalement :

$$M(a,b)^2 = I \iff \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & 1 \\ b & = & 0 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & -3 \\ b & = & 2 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & 3 \\ b & = & -2 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & -1 \\ b & = & 0 \end{array} \right.$$

(10) Il s'agit de déterminer une matrice B vérifiant :

$$B^2 = PDP^{-1}$$

On va chercher la matrice B sous la forme $P\Delta P^{-1}$ de telle sorte que le carré donne PDP^{-1}.

On pose $\Delta = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ de telle sorte que $\Delta^2 = \begin{pmatrix} \sqrt{2}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = D$.

On pose alors $B = P\Delta P^{-1}$ ce qui donne :

$$B^2 = P\Delta P^{-1}P\Delta P^{-1} = P\Delta^2 P^{-1} = PDP^{-1} = A$$

ce qui montre que la matrice $B = P\Delta P^{-1}$ répond à la question.