Math ECG 2. 2022-2023

Mathématiques Appliquées - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
ENC Bessières, Paris 17e.

Devoir surveillé n°2

Samedi 15 Octobre
Durée : 4 heures

Les questions précédées de $(*)$ *sont réservées aux khubes.*

Exercice 1

Dans tout l'exercice, on désigne par K la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et on introduit les deux sous-ensembles de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définis par :

$$\mathcal{E} = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \ : \ MK = KM = M\}, \quad \text{et} \quad \mathcal{S} = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \ : \ {}^tM = M\}.$$

(1) **Étude de** K.

(a) Calculer K^2. En déduire, sans calcul supplémentaire, que K est inversible et expliciter K^{-1}.
(b) $(*)$ Justifier que K est diagonalisable. En déduire, sans calcul, le spectre de K.
(c) Déterminer une base de $E_\lambda = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) : \ KX = \lambda X\}$ pour $\lambda = 1$ puis $\lambda = -1$. Que vaut $\dim(E_1) + \dim(E_{-1})$?

(2) (a) Montrer que $\mathcal{E}$ et $\mathcal{S}$ sont des espaces vectoriels en montrant qu'ils sont stables par combinaisons linéaires et tous deux non vides.
(b) Montrer par l'absurde qu'aucune matrice de $\mathcal{E}$ n'est inversible.
(c) Montrer que si $M \in \mathcal{E}$, alors $M^n \in \mathcal{E}$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.
(d) Montrer que si $M \in \mathcal{S}$, alors $M^n \in \mathcal{S}$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

(3) Montrer que la famille (A, B, C, D) formée des matrices définies ci-dessous est une famille libre de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(4) Déterminer une famille génératrice de $\mathcal{E}$. Cette famille en forme-t-elle une base? Quelle est la dimension de $\mathcal{E}$?

(5) Déterminer une base, et la dimension, de $\mathcal{S}$.

(6) On considère l'ensemble $\mathcal{K} = \mathcal{E} \cap \mathcal{S}$.
(a) Montrer que $\mathcal{K}$ est un sous-espace vectoriel et que $(A, B + C, D)$ en forme une base.

(b) Montrer que, pour toute matrice $M \in \mathcal{K}$, il existe trois suites $(x_n)_{n\geq 1}$, $(y_n)_{n\geq 1}$, $(z_n)_{n\geq 1}$ telles que,
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad M^n = x_n A + y_n(B+C) + z_n D.$$

(7) On introduit alors la matrice $T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

(a) Vérifier que $T \in \mathcal{K}$ et donner ses coordonnées dans la base $(A, B+C, D)$.

(b) Montrer, par récurrence, que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$T^n = x_n A + z_n D,$$
où $x_{n+1} = 6x_n$ et $z_{n+1} = 2z_n$.

(c) En déduire l'expression du terme général de (x_n), de (z_n) puis l'expression de T^n.

(8) **Une suite de matrices colonnes**

On introduit les matrices colonnes
$$V = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
et on considère la suite de matrices colonnes (U_n) définie par son premier terme U_1 et la relation de récurrence, pour $n \geq 1$,
$$U_{n+1} = TU_n + V.$$

(a) Montrer que $I - T$ est inversible et calculer son inverse avec un pivot de Gauss.

(b) Déterminer une matrice colonne L telle que $L = TL + V$.

(c) Vérifier que $U_{n+1} - L = T(U_n - L)$ et montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a
$$U_n - L = T^{n-1}(U_1 - L).$$

(d) En déduire l'expression de U_n, pour $n \geq 1$.

Exercice 2

On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\varphi(x) = e^x - xe^{1/x}$.

Partie I - Étude de la fonction φ

(1) (a) Montrer que
$$\varphi(x) = e^x - x - 1 + o(1), \qquad x \to +\infty.$$

(b) En déduire un équivalent et la limite de $\varphi(x)$ en $+\infty$ ainsi que la nature de la branche infinie de la courbe de φ en $+\infty$.

(c) Déterminer un équivalent puis la limite de $\varphi(x)$ en 0. Interpréter graphiquement.

(2) Justifier que φ est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \varphi'''(x) = e^x + \frac{3x+1}{x^5}e^{1/x}.$$

(3) Déterminer les variations de φ'' et calculer $\varphi''(1)$.

(4) En déduire les variations de φ' puis, montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi'(x) \geq e$.

(5) En déduire les variations de φ sur $\mathbb{R}_+^*$.

(6) On donne le résultat de l'exécution suivante

```python
import numpy as np
def phi(x):
 return np.exp(x)-x*np.exp(1/x)

print(phi(2))
print(phi(3))
```

Affichage Python

```
> > >
4.091613557530394
15.8986996479294
```

Montrer que : $\forall x \geq 3, \quad \varphi(x) \geq ex$.

(7) Montrer que la courbe de φ admet un unique point d'inflexion dont on précisera les coordonnées ainsi que l'équation de la tangente.

(8) Représenter l'allure de la courbe de φ en y faisant apparaître les différents éléments étudiés ainsi que la droite d'équation $y = ex$.

Partie II - Étude d'une suite récurrente

On introduit la suite (u_n) définie, pour $n \in \mathbb{N}$ par

$$u_0 = 3, \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \varphi(u_n).$$

(9) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et que $u_n \geq 3e^n$.

(10) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

(11) Quelle est la nature de la suite (u_n)?

(12) Écrire une fonction, en Python, d'en-tête `def plus_petit_entier(A):` qui prend en argument un réel $A \geq 0$ et renvoie le plus petit entier n tel que $u_n \geq A$.

(13) (a) Justifier que la série $\sum \frac{1}{u_n}$ converge. On note S sa somme.

(b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq S - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k} \leq \frac{1}{3(e-1)e^n}.$$

(c) En déduire l'écriture d'une fonction Python d'en-tête `def valeur_approchée_S(eps):` qui, prenant en argument un réel `eps` > 0 renvoie une valeur approchée de S à `eps` près.

Partie III - Étude d'une suite implicite

(14) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $\varphi(x) = n$ admet une unique solution, notée v_n dans $\mathbb{R}_+^*$. Préciser la valeur de u_0.

(15) Montrer que (v_n) est croissante et qu'elle diverge vers ∞.

(16) (a) Justifier que $0 < v_1 < 2$ et que $1 < v_n < n$ pour $n \geq 2$.

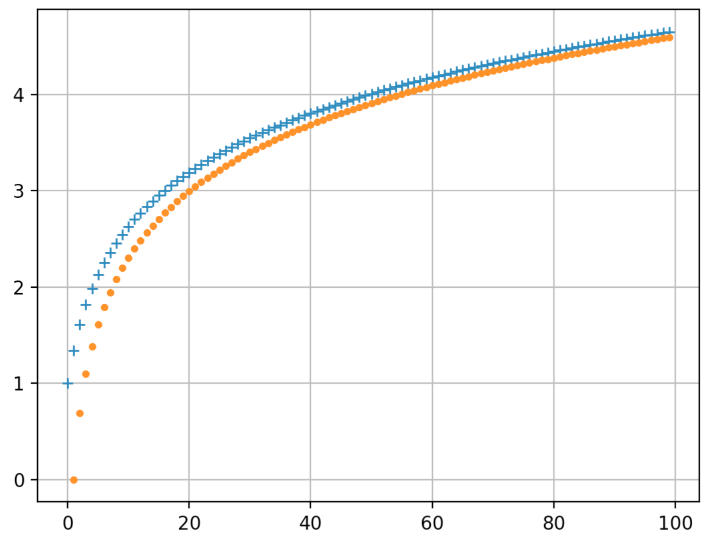
(b) Écrire une fonction Python, d'en-tête `def suite_v(n):` qui, prenant en argument un entier n renvoie une valeur approchée de v_n à 10^{-3} près. On utilisera une recherche par dichotomie.

(c) On ajoute les commandes suivantes dont l'exécution permet l'affichage ci-dessous. Que peut-on conjecturer ?

```
import matplotlib.pyplot as plt

N=[k for k in range(100)]
Y=[suite_v(k) for k in N]
Z=[np.log(k) for k in N]
plt.grid()
plt.plot(N,Y, '+')
plt.plot(N,Z, '.')
plt.show()
```

Affichage Python



(17) (a) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{n}{e^{v_n}} = 1 - \frac{v_n}{e^{v_n}} \exp\left(\frac{1}{v_n}\right).$$

(b) En déduire que $e^{v_n} \sim n$, $n \to +\infty$.

(c) Démontrer alors la conjecture émise à la Question (16c).

Exercice 3

On lance indéfiniment une pièce donnant *Pile* avec la probabilité p et *Face* avec la probabilité $q = 1 - p$. On suppose que $p \in]0, 1[$ et on admet que les lancers sont mutuellement indépendants.

Pour tout entier naturel k, supérieur ou égal à 2, on dit que le $k^{ième}$ lancer est un changement s'il amène un résultat différent de celui du $(k-1)^{ième}$ lancer.

On note P_k (resp. F_k) l'événement : "on obtient *Pile* (resp. *Face*) au $k^{ième}$ lancer".
Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de changements survenus durant les n premiers lancers.

Par exemple lorsque qu'on effectue les 3 premiers lancers et qu'on obtient l'événement $P_1 \cap F_2 \cap P_3$, il y a eu deux changements (aux $2^{ième}$ et $3^{ième}$ lancers). Ou encore, lorsqu'on effectue les 4 premiers lancers et qu'on obtient l'événement $F_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4$, il y a eu un seul changement (au $3^{ième}$ lancer).

Partie I - Simulation informatique et conjectures

(1) Recopier et compléter la fonction Python suivante prenant en argument un entier $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ et un réel $p \in]0;1[$ et renvoyant une simulation de la variable aléatoire X_n.

```python
import numpy as np
import numpy.random as rd

def simul_X(n, p):
    chgt= 0
    T=[rd.binomial(1, p) for k in range(n)]
    for ....... :
        if ......  :
            chgt=chgt+1
    return chgt
```

(2) On exécute le script suivant pour différentes valeurs de n et avec $p = q = 1/2$.

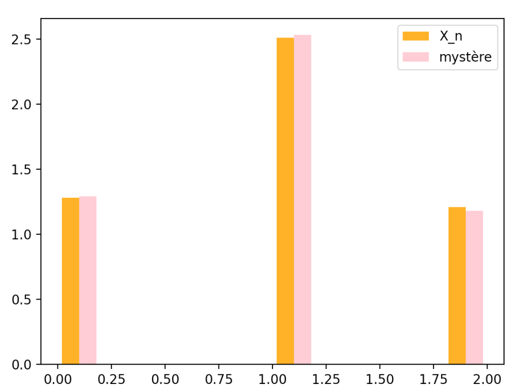
```python
import matplotlib.pyplot as plt

p=1/2
L=[ ]
M=[ ]
for k in range(1000):
    L.append(simul_X(n,p))
    M.append(rd.binomial(n-1,p))

plt.hist([L, M], color = ['orange', 'pink'], density = True,
    label = ['X_n' , 'mystère'])
plt.legend()
plt.show()
```

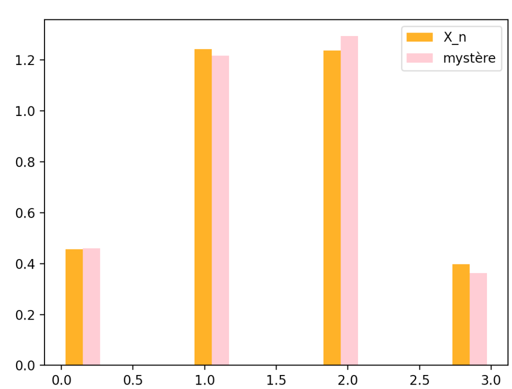
Affichage Python

n=3



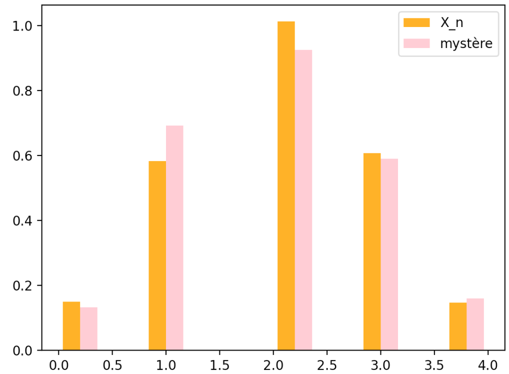
Affichage Python

n=4



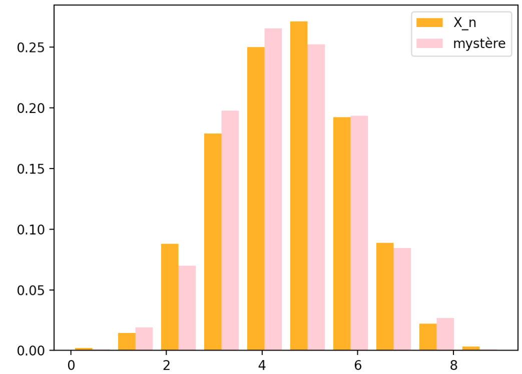
Affichage Python

n=5



Affichage Python

n=10



Que peut-on alors conjecturer quant à la la loi de X_n? Dans quel cas? Justifier le raisonnement.

Partie II - Étude de quelques exemples

(4) Donner (en la justifiant) la loi de X_2.

(5) (a) Donner (en la justifiant) la loi de X_3.

(b) Vérifier que $E(X_3) = 4pq$ et que $V(X_3) = 2pq(3 - 8pq)$.

(6) (a) Trouver la loi de X_4.

(b) Calculer $E(X_4)$.

Partie III - Étude du cas $p \neq q$.

Dans cette partie, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

(7) Exprimer $P(X_n = 0)$ en fonction de p, q et n.

(8) (a) Montrer que : $\forall a, b \in \mathbb{R},\ \forall m \in \mathbb{N}, \quad b^m - a^m = (b-a)\left(\sum_{k=0}^{m-1} a^k b^{m-1-k}\right)$.

(b) En décomposant l'événement $(X_n = 1)$ en une réunion d'événements incompatibles, montrer que

$$P(X_n = 1) = \frac{2pq}{q-p}\left(q^{n-1} - p^{n-1}\right).$$

(9) En distinguant les cas n pair et n impair, exprimer $P(X_n = n-1)$ en fonction de p et q.

(10) Retrouver, grâce aux trois questions précédentes, les lois de X_3 et X_4.

(11) Pour tout entier naturel $k \geq 2$, on note Z_k la variable aléatoire qui vaut 1 si le $k^{\text{ième}}$ lancer est un changement et 0 sinon.

(a) À l'aide du système complet d'événement (P_{k-1}, F_{k-1}), montrer que Z_k suit une loi de Bernoulli de paramètre $2pq$.

(b) Écrire X_n à l'aide de certaines des variables Z_k.

(c) En déduire $E(X_n)$.

Partie IV - Étude du cas $p = q$.

(12) Vérifier, en utilisant les résultats de la partie 1, que X_3 et X_4 suivent chacune une loi binomiale.

(13) Montrer que, pour tout entier naturel $n \geq 2$, X_n suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.