Math ECG 2. 2022-2023

Mathématiques Appliquées - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
ENC Bessières, Paris 17e.

Devoir surveillé n°3 - sujet A

Samedi 3 Décembre
Durée : 4 heures

Les questions précédées de $(*)$ *sont réservées aux khubes.*

Exercice 1

Une urne contient des boules blanches (en proportion p), des boules noires (en proportion q) et des boules rouges (en proportion r). On a donc $p+q+r=1$ (on suppose que $p,q,r \in]0;1[$). On effectue des tirages successifs **avec remise** dans cette urne. Pour $i \in \mathbb{N}^*$, on note T_i la variable qui vaut 1 si la $i-$ème boule tirée est blanche, -1 si elle est noire et 0 si elle est rouge.
Les tirages étant effectués avec remise, les variables (T_i) sont donc mutuellement indépendantes.

Partie A

On note ensuite X_1 la variable aléatoire égale au numéro du tirage qui amène pour la première fois une boule blanche et X_2 celui correspondant au tirage où sort pour la première fois la **deuxième** boule blanche.

Par exemple, si les premiers tirages donnent *Noire, Rouge, Noire, Blanche, Rouge, Blanche, ...*, on a $X_1 = 4$ et $X_2 = 6$.

(1) Expliciter, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, la loi de T_i. Calculer son espérance et sa variance.

(2) Reconnaître la loi de X_1. Rappeler son espérance et sa variance.

(3) Compléter la fonction Python suivante, afin qu'elle simule les variables X_1 et X_2. Pourquoi la fonction ne prend-elle en argument que a proportion p de boules blanches?

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

def simul_X1_X2(p):
    x1=.......
    while ................ :
        x1=.............
    x2=..........
    while ................ :
        x2=...............
    return [x1, x2]
```

(4) (a) Expliciter la loi conjointe du couple (X_1, X_2).
(b) En déduire la loi marginale de X_2.

(c) Montrer que X_2 admet une espérance et que $E(X_2) = \dfrac{2}{p}$.

(5) On note $U_2 = X_2 - X_1$.

(a) Pour $j \in \mathbb{N}^*$, déterminer $P(U_2 = j)$.
En déduire que X_1 et U_2 suivent la même loi, puis que U_2 admet une variance et préciser sa valeur.
(b) Montrer que U_2 est indépendante de X_1.
(c) Exprimer X_2 en fonction de U_2 et X_1 et en déduire que X_2 admet une variance qu'on explicitera.
(d) Que vaut $\operatorname{cov}(X_1, X_2)$? Les variables X_1 et X_2 sont-elles indépendantes?
(e) On rajoute les instructions Python suivantes à la suite de la fonction précédente. Que peut-on prévoir quant à l'affichage après exécution de celles-ci ?

```
p=1/4;
L=[ ]; M=[ ];
for k in range(10000):
    [X1,X2]=simul_X1_X2(p)
    L=L.append(X1)
    M=M.append(X2)
U=[M[k]-L[k] for k in range(10000)]
print(np.mean([L[k]*U[k] for k in range(10000)])-np.mean(L)*np.mean(U))
```

Partie B

On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = T_1 + ... + T_n$.

(6) Quelle est la loi de S_1? Préciser son espérance et sa variance.
(7) Expliciter l'espérance et la variance de S_n.
(8) Soit $t > 0$. On pose $V_n = t^{S_n}$.

(a) Déterminer la loi, l'espérance et la variance de V_1.
(b) En déduire l'expression de $E(V_n)$.

Exercice 2

On rappelle que deux matrices A et B de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ sont dites semblables lorsqu'il existe une matrice P de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que $B = P^{-1}AP$.

L'objectif de cet exercice est d'étudier des exemples de matrices inversibles qui sont semblables à leur inverse. Les trois parties de cet exercice sont indépendantes entre elles.

Partie A : Premier exemple

On considère l'endomorphisme φ de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(1) Justifier que φ est un automorphisme.

(2) Déterminer trois vecteurs u, v et w de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tels que

$$\mathrm{Ker}(A-I)=\mathrm{Vect}(u),\quad \mathrm{Ker}\left(A-\frac{1}{2}I\right)=\mathrm{Vect}(v),\quad \text{et}\quad \mathrm{Ker}(A-2I)=\mathrm{Vect}(w).$$

(3) Vérifier que la famille $\mathcal{B}'=(u,v,w)$ forme une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et préciser la matrice D de φ dans cette base.

(4) En déduire une matrice P, inversible, telles que $A=PDP^{-1}$. Expliciter la matrice D^{-1}.

(5) On note $Q=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$. Calculer Q^2 et QDQ.

(6) En déduire que les matrices A et A^{-1} sont semblables.

Partie B : Deuxième exemple

On considère f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ f(x,y,z)=(x,-z,y+2z).$$

On note M la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
On considère également les vecteurs u_1 et u_2 de $\mathbb{R}^3$ définis par : $u_1=(1,0,0)$ et $u_2=(0,1,-1)$.

(7) Expliciter la matrice M et montrer que M est inversible.

(8) (a) Montrer que (u_1,u_2) forme une base de $\mathrm{Ker}(f-\mathrm{id})$.
(b) Déterminer un vecteur u_3 de $\mathbb{R}^3$ tel que : $f(u_3)-u_3=u_2$.
(c) Montrer que la famille $\mathcal{B}_1=(u_1,u_2,u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

On admet que $\mathcal{B}_2=(u_1,-u_2,u_3)$ est également une base de $\mathbb{R}^3$.

(9) (a) Écrire la matrice M_1 de f dans la base $\mathcal{B}_1$ et la matrice M_2 de f dans la base $\mathcal{B}_2$.
(b) Justifier que les matrices M_1 et M_2 sont semblables, et calculer M_1M_2.

(10) En déduire que les matrices M et M^{-1} sont semblables.

Partie C : Troisième exemple

On considère la matrice T de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par : $T=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$ et on pose $N=T-I_3$.

(11) Justifier que la matrice T est inversible.

(12) (a) Calculer N^3 et $(I_3+N)(I_3-N+N^2)$.
(b) En déduire une expression de T^{-1} en fonction de I_3, N et N^2.

(13) On note g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est N.

(a) Justifier qu'il existe un vecteur u de $\mathbb{R}^3$ tel que $g\circ g(u)\neq 0$ et $g\circ g\circ g(u)=0$.
(b) Montrer que la famille $\mathcal{B}_3=(g\circ g(u),g(u),u)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
(c) Écrire la matrice de g dans la base $\mathcal{B}_3$.
(d) Calculer N^2-N et en déduire que les matrices N et N^2-N sont semblables.

(14) Montrer que les matrices T et T^{-1} sont semblables.

Exercice 3

Partie I : Étude de deux suites

Pour tout entier naturel n non nul, on pose :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n), \quad \text{et} \quad v_n = u_n - \frac{1}{n}.$$

(1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f(x) = \dfrac{1}{x+1} + \ln(x) - \ln(x+1)$.

- (a) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.
- (b) Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}^{+*}$ et dresser son tableau de variations.
- (c) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = f(n)$.
- (d) En déduire la monotonie de la suite (u_n).
- (e) Écrire une fonction Python d'en-tête `def suite_u(n) :` qui prend en argument un entier naturel n non nul et qui renvoie la valeur de u_n.

(2) (a) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

- (b) Montrer que pour tout réel x positif, $\ln(1+x) \leq x$.
  En déduire que la suite (v_n) est croissante.
- (c) Donner le développement limité d'ordre 2 de $\ln(1+x)$ en 0. En déduire que

$$v_{n+1} - v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}.$$

- (d) Déterminer la nature de la série de terme général $v_{n+1} - v_n$. On note $\gamma = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (v_{n+1} - v_n)$.
- (e) Pour $n \geq 2$, simplifier la somme partielle : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} (v_{k+1} - v_k)$.
  En déduire que la suite $(v_n)_{n\geq 2}$ converge vers γ.

(3) (a) Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

- (b) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n \leq \gamma \leq u_n$$

  puis que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |u_n - \gamma| \leq \frac{1}{n}.$$

- (c) On rappelle que la commande `floor(x)` de la bibliothèque `numpy` (que l'on suppose importée sous le raccourci `np`) renvoie la partie entière d'un réel x et on suppose que la fonction `suite_u` de la Question (1e) a été correctement programmée. Que renvoie la fonction ci-dessous

```python
def mystere(eps) :
    n=np.floor(1/eps)+1
    return suite_u(n)
```

Partie II: Étude d'une série

Pour tout entier naturel n, on pose $a_n = \dfrac{1}{n(2n-1)}$.

(4) Démontrer que la série de terme général a_n converge.

(5) (a) Justifier que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}.$$

(b) Déterminer deux réels α et β tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{2n-1}.$$

(c) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{k=1}^{n} a_k = 2 \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}.$$

(6) (a) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = u_{2n} - u_n + \ln(2).$$

où (u_n) est la suite définie dans la Partie I.

(b) Calculer alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$.

(7) (a) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}}.$$

(b) Retrouver alors le résultat de la Question (6b)