Devoir surveillé n°3 - sujet A

Solution

Les questions précédées de (∗) sont réservées aux khubes.

Exercice 1

Une urne contient des boules blanches (en proportion p), des boules noires (en proportion q) et des boules rouges (en proportion r). On a donc $p+q+r=1$ (on suppose que $p,q,r \in]0;1[$). On effectue des tirages successifs **avec remise** dans cette urne. Pour $i \in \mathbb{N}^*$, on note T_i la variable qui vaut 1 si la $i-$ème boule tirée est blanche, -1 si elle est noire et 0 si elle est rouge.
Les tirages étant effectués avec remise, les variables (T_i) sont donc mutuellement indépendantes.

Partie A

On note ensuite X_1 la variable aléatoire égale au numéro du tirage qui amène pour la première fois une boule blanche et X_2 celui correspondant au tirage où sort pour la première fois la **deuxième** boule blanche.

Par exemple, si les premiers tirages donnent *Noire, Rouge, Noire, Blanche, Rouge, Blanche, ...*, on a $X_1 = 4$ et $X_2 = 6$.

(1) Par définition, $T_i(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$. Plus précisément, on peut écrire la loi de T_i sous forme de tableau

a	-1	0	1
$P(T_i = a)$	q	r	p

Le tableau permet de calculer sans mal espérance et variance.

$$E(T_i) = (-1)q + 0 \cdot r + p = p - q$$

$$\begin{aligned} E(T_i^2) &= (-1)^2 q + 0^2 r + p \\ &= p + q \\ V(T_i) &= E(T_i^2) - E(T_i)^2 \\ &= p + q - (p-q)^2 \end{aligned}$$

(2) Identifiant l'obtention d'une boule blanche à un *succès*, on reconnait pour X_1 le temps d'attente du premier succès lors de la répétition d'épreuves indépendantes de Bernoulli. On reconnait donc une loi géométrique de paramètre p

$$X_1 \hookrightarrow \mathcal{G}(p).$$

D'après le cours, on peut immédiatement affirmer que

$$E(X_1) = \frac{1}{p}, \qquad V(X_1) = \frac{(1-p)}{p^2}.$$

(3) Les variables X_1 et X_2 qu'on cherche à simuler ne dépendent que de la proportion de boules blanches p.

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

def simul_X1_X2(p):
    x1=1 # on initialise avec le premier lancer
    while rd.rand() > p # tant qu'on a pas de blanche
        x1=x1+1 # on relance
    x2=x1+1 # au moins un lancer de plus pour la deuxième blanche
    while rd.rand() > p
        x2=x2+1
    return [x1, x2]
```

(4) (a) Pour le calcul, on utilise la modélisation suivante, $[T_k = 1]$ représente l'obtention d'une boule blanche au $k-$ième lancer. Ainsi, pour $i \in \mathbb{N}^*$ et $j \geq i+1$, et par indépendance des lancers (donc des variables (T_k)),

$$\begin{aligned}
P(X_1 = i \cap X_2 = j) &= P\left(\left(\bigcap_{k=1}^{i-1}[T_k \neq 1]\right) \cap [T_i = 1] \cap \left(\bigcap_{k=i+1}^{j-1}[T_k \neq 1]\right) \cap [T_j = 1]\right) \\
&= \left(\prod_{k=1}^{i-1} P(T_k \neq 1)\right) \times P(T_i = 1) \times \left(\prod_{k=i+1}^{j-1} P(T_k \neq 1)\right) \times P(T_j = 1) \\
&= (1-p)^{i-1} \times p \times (1-p)^{j-1-i} \times p \\
&= (1-p)^{j-2}p^2
\end{aligned}$$

Si $j \leq i$, alors $P(X_1 = i \cap X_2 = j) = 0$ (la deuxième boule blanche arrive nécessairement *après* la première). Au final, on peut écrire

$$P(X_1 = i \cap X_2 = j) = \begin{cases} (1-p)^{j-2}p^2, & \text{si } j \geq i+1 \\ 0, & \text{si } j \leq i \end{cases}$$

(b) Par la formule des probabilités totales appliquée au s.c.e $\{(X_1 = i) : i \in \mathbb{N}^*\}$, on a, pour $j \in \mathbb{N}, j \geq 2$,

$$\begin{aligned}
P(X_2 = j) &= \sum_{i=1}^{+\infty} P(X_1 = i \cap X_2 = j) \\
&= \sum_{i=1}^{j-2} P(X_1 = i \cap X_2 = j) \qquad (\text{car } P(X_1 = i \cap X_2 = j) = 0 \text{ si } i \geq j) \\
&= \sum_{i=1}^{j-2} (1-p)^{j-1}p^2 \\
&= (j-1)(1-p)^{j-2}p^2.
\end{aligned}$$

(c) D'après le cours

$$\begin{aligned}
X_2 \text{ admet une espérance} &\iff \sum jP(X_2 = j) \text{ converge absolument} \\
&\iff \sum j(j-1)(1-p)^{j-2}p^2 \text{ converge}
\end{aligned}$$

Or,

$$j(j-1)(1-p)^{j-1}p^2 = p^2 j(j-1)(1-p)^{j-2}$$

et on reconnait le multiple du terme général de la série géométrique (de raison $1-p$) dérivée deux fois et convergente. Donc X_2 admet une espérance et

$$E(X_2) = p^2 \sum_{j=2}^{+\infty} j(j-1)(1-p)^{j-2} = p^2 \times \frac{2}{(1-(1-p))^3} = \frac{2}{p}.$$

(5) On note $U_2 = X_2 - X_1$.

(a) Soit $j \in \mathbb{N}^*$. C'est encore la formule des probabilités totales appliquée au même s.c.e que précédemment.

$$\begin{aligned}
P(U_2 = j) &= \sum_{i=1}^{+\infty} P(U_2 = j \cap X_1 = i) \\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} P(X_2 = j + i \cap X_1 = i) \\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} (1-p)^{i+j-2} p^2 \\
&= (1-p)^{j-1} p^2 \sum_{i=1}^{+\infty} (1-p)^{i-1} \\
&= (1-p)^{j-1} p^2 \times \frac{1}{1-(1-p)} \\
&= (1-p)^{j-1} p \\
&= P(X_1 = j)
\end{aligned}$$

Ainsi U_2 et X_1 suivent toutes deux une loi géométrique de paramètre p. On en déduit que U_2 admet espérance et variance et que

$$E(U_2) = \frac{1}{p}, \qquad V(U_2) = \frac{(1-p)}{p^2}.$$

(b) On vérifie la condition définissant l'indépendance. Soient $i, j \in \mathbb{N}^* times \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}
P(X_1 = i \cap U_2 = j) &= P(X_1 = i \cap X_2 - X_1 = j) = P(X_1 = i \cap X_2 = i + j) \\
&= (1-p)^{i+j-2} p^2 \\
&= (1-p)^{i-1} p \times (1-p)^{j-1} p \\
&= P(X_1 = i) P(U_2 = j)
\end{aligned}$$

et les variables X_1 et U_2 sont bien indépendantes.

(c) Le programme simule 10000 fois les variables X_1 et X_2 puis calcule la *covariance empirique* de X_1 et U_2. Les deux variables en question étant indépendantes, cette covariance est nulle. Le programme devrait afficher 0.

(d) Il est clair que $X_2 = X_1 + U_2$. Comme X_1 et U_2 admettent toutes deux une variance et qu'elles sont indépendantes, on peut alors écrire que

$$V(X_2) = V(X_1) + V(U_2) = 2V(X_1) = \frac{2(1-p)}{p^2}.$$

(e) On développe $V(U_2)$.

$$\begin{aligned}
V(U_2) &= V(X_2 - X_1) \\
&= V(X_2) + V(X_1) - 2\text{cov}(X_1, X_2)
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(X_1, X_2) &= \frac{1}{2}\left(V(X_2) + V(X_1) - V(U_2)\right) \\ &= \frac{1-p}{p^2}\end{aligned}$$

Cette covariance étant non nulle, on en conclut que les variables X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.

Partie B

On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = T_1 + ... + T_n$.

(6) En observant que $S_1 = T_1$, la toute première question de la Partie A permet de voir que $E(S_1) = p - q$ et $V(S_1) = p + q - (p-q)^2$.

(7) Par linéarité de l'espérance, on a

$$E(S_n) = \sum_{i=1}^{n} E(T_i) = n(p-q).$$

Par **indépendance** des variables T_i, on a

$$V(S_n) = \sum_{i=1}^{n} V(T_i) = n\left(p + q - (p-q)^2\right).$$

(8) Soit $t > 0$. On pose $V_n = t^{S_n}$.

(a) Par définition $V_1 = t^{T_1}$. On peut donc écrire le tableau de la loi de T_1:

a	$1/t$	1	t
$P(V_1 = a)$	q	r	p

Il suit que

$$E(V_1) = \frac{1}{t} \times q + r + t \times p = \frac{q + rt + t^2}{t}.$$

(b) On observe que

$$\begin{aligned}E(V_n) &= E(t^{S_n}) = E\left(\prod_{i=1}^{n} t^{T_i}\right) \\ &= \prod_{i=1}^{n} E\left(t^{T_i}\right)\end{aligned}$$

par indépendance des variables t^{T_i} par le **lemme des coalitions**. Comme les variables t^{T_i} ont toutes la même espérance, il suit que

$$E(V_n) = E(V_1)^n = \left(\frac{q + rt + t^2}{t}\right)^n.$$

Exercice 2

Cet exercice provient du sujet **EML 2019**.

On rappelle que deux matrices A et B de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ sont dites semblables lorsqu'il existe une matrice P de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que $B = P^{-1}AP$.

L'objectif de cet exercice est d'étudier des exemples de matrices inversibles qui sont semblables à leur inverse. Les trois parties de cet exercice sont indépendantes entre elles.

Partie A : Premier exemple

On considère l'endomorphisme φ de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(1) La matrice A est triangulaire supérieure sans zéro sur la diagonale, elle est donc inversible et l'endomorphisme qu'elle représente, φ bijectif: c'est un automorphisme.

(2) On résout

$$\begin{aligned} X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}(A - I) &\iff (A-I)X = 0 \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} -y + z &=& 0 \\ -y/2 &=& 0 \\ z &=& 0 \end{array} \right. \\ &\iff X = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\operatorname{Ker}(A - I) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right), \quad \text{et} \quad u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}\left(A - \frac{1}{2}I\right) &\iff \left(A - \frac{1}{2}I\right) X = 0 \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} x/2 - y + z &=& 0 \\ (3/2)z &=& 0 \end{array} \right. \\ &\iff X = \begin{pmatrix} 2y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\operatorname{Ker}\left(A - \frac{1}{2}I\right) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right), \quad \text{et} \quad v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Enfin,

$$\begin{aligned} X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}(A - 2I) &\iff (A-2I)X = 0 \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} -x - y + z &=& 0 \\ -(3/2)y &=& 0 \end{array} \right. \\ &\iff X = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mathrm{Ker}(A-2I) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right), \quad \text{et} \quad w = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

(3) La famille $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ est composée de trois vecteurs de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ qui est un espace vectoriel de dimension 3. Pour qu'elle en forme une base, il suffit alors de vérifier qu'elle est libre. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que

$$au + bv + cw = 0.$$

Alors, on a le système

$$\begin{cases} a+2b+c &= 0\\ b &= 0\\ c &= 0 \end{cases} \iff a = b = c = 0.$$

Ainsi, $\mathcal{B}'$ forme bien une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Par construction de u, v, w, on a

$$D = \mathrm{Mat}(\varphi, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1/2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

En effet, $u \in \mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{id})$ donc $\varphi(u) = u$, $v \in \mathrm{Ker}(\varphi - (1/2)\mathrm{i}d)$ donc $\varphi(v) = (1/2)v$ et $w \in \mathrm{Ker}(\varphi - 2\mathrm{id})$ donc $\varphi(w) = 2w$.

(4) En introduisant la matrice de passage de la base canonique vers la base $\mathcal{B}'$, c'est à dire

$$P = \begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

la formule de changement de base permet d'affirmer que

$$A = PDP^{-1}.$$

De plus, comme D est diagonale, on peut directement affirmer que

$$D^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & (1/2)\end{pmatrix}.$$

(5) On note $Q = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

Le calcul donne

$$Q^2 = I_3, \qquad \text{et} \qquad QDQ = D^{-1}.$$

(6) Remarquons d'abord que d'après la question précédente, $Q.Q = I_3$, c'est-à-dire que Q est inversible et $Q^{-1} = Q$.
Par ailleurs $A = PDP^{-1}$ donc $A^{-1} = (PDP^{-1})^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$, or $D^{-1} = QDQ$ d'après la question précédente, donc

$$A^{-1} = PQDQP^{-1} = PQDQ^{-1}P^{-1}.$$

Enfin $D = P^{-1}AP$ donc

$$A^{-1} = PQ(P^{-1}AP)Q^{-1}P^{-1} = PQP^{-1}APQ^{-1}P^{-1} = (PQP^{-1})A(PQP^{-1})^{-1}.$$

Ainsi si l'on note $R = PQP^{-1}$, on a $A^{-1} = RAR^{-1}$, c'est-à-dire que A et A^{-1} sont semblables.

Partie B : Deuxième exemple

(7) On a $f(1,0,0)=(1,0,0)$, $f(0,1,0)=(0,0,1)$ et $f(0,0,1)=(0,-1,2)$ donc

$$M=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&1&2\end{pmatrix}$$

Or, la permutation des lignes d'une matrice conserve les propriétés d'inversibilité. Ainsi,

$$M \text{ inversible} \iff \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&0&-1\end{pmatrix} \text{ inversible}$$

Mais cette dernière matrice est bien inversible puisqu'il s'agit d'une matrice triangulaire de coefficients diagonaux tous non-nuls. Ainsi M est inversible.

(8) (a) Soit $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}(M-I_3)X=0 &\iff \left\{\begin{array}{rcl}-y-z&=&0\\y+z&=&0\end{array}\right.\\ &\iff z=-y\\ &\iff X=\begin{pmatrix}x\\y\\-y\end{pmatrix}=xu_1+yu_2\end{aligned}$$

La famille (u_1,u_2) est bien génératrice de $\mathrm{Ker}(f-\mathrm{id})$. Comme ces deux vecteurs sont (non nuls et) clairement non colinéaires, ils en forment également une base.

(b)

$$\begin{aligned}f(u_3)-u_3=u_2 &\iff (M-I_3)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\\ &\iff \left\{\begin{array}{rcl}-y-z&=&1\\y+z&=&-1\end{array}\right.\\ &\iff z=-y-1\end{aligned}$$

Ainsi on peut par exemple choisir $x=0$, $y=0$, et $z=-1$ ce qui donne $u_3=(0,0,-1)$.

(c) Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que $au_1+bu_2+cu_3=0$. Alors,

$$\left\{\begin{array}{rcl}a&=&0\\b&=&0\\-b-c&=&0\end{array}\right.$$

d'où $a=b=c=0$. Ainsi la famille (u_1,u_2,u_3) est libre. De plus elle est constituée de trois vecteurs dans $\mathbb{R}^3$ (de dimension 3) et en forme donc une base.

(9) (a) On a montré précédemment que (u_1,u_2) est une base de $\mathrm{Ker}(f-\mathrm{id})$, donc $f(u_1)=u_1$ et $f(u_2)=u_2$. Enfin on a choisi u_3 tel que $f(u_3)-u_3=u_2$, c'est-à-dire $f(u_3)=u_2+u_3$. Ainsi la matrice de f dans la base (u_1,u_2,u_3) est alors

$$M_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Déterminons maintenant M_2 : on a $f(u_1) = u_1$, $f(-u_2) = -f(u_2) = -u_2$ par linéarité de f et
$f(u_3) = -(-u_2) + u_3$, donc

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) M_1 et M_2 représentent le même endomorphisme f dans deux bases différentes, elles sont donc semblables (en effet si on note R la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$ alors $M_2 = R^{-1}M_1R$ d'après la formule de changement de base).
Le calcul donne $M_1M_2 = I_3$.

(10) On vient de montrer que $M_1M_2 = I_3$, donc M_1 est inversible et $M_1^{-1} = M_2$.
M et M_2 représentent le même endomorphisme f donc M et M_2 sont semblables. Par ailleurs M^{-1} et M_1^{-1} représentent le même endomorphisme f^{-1} donc M^{-1} et M_1^{-1} sont semblables. Autrement dit M^{-1} et M_2 sont semblables puisque $M_1^{-1} = M_2$.
Finalement on a montré que M et M^{-1} sont toutes deux semblables à la même matrice M_2 . Ainsi par transitivité M et M^{-1} sont semblables.

Partie C : Troisième exemple

(11) T est triangulaire supérieure de coefficients diagonaux tous non-nuls, donc T est inversible.

(12) (a) Le calcul donne $N^3 = 0$. Ainsi,

$$(I_3 + N)(I_3 - N + N^2) = I_3 - N + N^2 + N - N^2 + N^3 = I_3 + N^3 = I_3.$$

(b) On vient de montrer que $(I_3 + N)(I_3 - N + N^2) = I_3$, donc $I_3 + N = T$ est inversible et

$$T^{-1} = I_3 - N + N^2.$$

(13) (a) On vérifie par le calcul que $N^2 \neq 0_3$, donc g^2 n'est pas l'endomorphisme nul, donc il existe $u \in \mathbb{R}^3$ tel que $g^2(u) \neq 0$. En revanche $N^3 = 0$ donc g^3 est l'endomorphisme nul, en particulier $g^3(u) = 0$.

(b) Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $ag^2(u) + bg(u) + cu = 0$. Alors en appliquant g^2 et par linéarité de g^2 , on obtient $ag^4(u)+bg^3(u)+cg^2(u) = g^2(0) = 0$, autrement dit puisque $g^3(u) = g^4(u) = 0$, $cg^2(u) = 0$.
Or $g^2(u) \neq 0$ donc $c = 0$.
L'équation initiale se récrit donc : $ag^2(u) + bg(u) = 0$. En appliquant g qui est linéaire, on obtient alors : $ag^3(u) + bg^2(u) = 0$, c'est-à-dire $bg^2(u) = 0$, or $g^2(u) \neq 0$, donc $b = 0$.
Finalement il reste $ag^2(u) = 0$, d'où $a = 0$. On a donc montré que $a = b = c = 0$, et donc la famille $\mathcal{B}_3$ est libre. Il s'agit par ailleurs d'une famille de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$, ainsi $\mathcal{B}_3$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(c) On a $g\big(g^2(u)\big) = g^3(u) = 0$, $g\big(g(u)\big) = g^2(u)$, et $g(u) = g(u)$ donc la matrice de g dans la base $\mathcal{B}_3$ est :

$$M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(d) Le calcul donne

$$N^2 - N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = M_3.$$

Or M_3 et N sont semblables car elles représentent le même endomorphisme g dans des bases différentes. Ainsi $N^2 - N$ et N sont semblables.

(14) D'après la question précédente il existe une matrice U inversible telle que $N = U^{-1}(N^2 - N)U$. En remarquant que $I_3 = U^{-1}U$, on peut alors écrire

$$T = I_3 + N = U^{-1}U + U^{-1}(N^2 - N)U = U^{-1}(I_3 + N^2 - N)U\,.$$

Or d'après la question 12b), $T^{-1} = I_3 + N^2 - N$, donc $T = U^{-1}T^{-1}U$, autrement dit$T$ et T^{-1} sont semblables.

Exercice 3

Cet exercice est extrait du sujet **ECRICOME 2018**.

Partie I : Étude de deux suites

Pour tout entier naturel n non nul, on pose :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n), \quad \text{et} \quad v_n = u_n - \frac{1}{n}.$$

(1) (a) La limite en 0 ne pose aucun problème, c'est celle du log, on a donc

$$\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty.$$

En $+\infty$, on a une forme indéterminée; mais on met tout sous un même logarithme et on sait que $x/(x+1)$ tend vers 1 donc

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x+1} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = 0.$$

(b) Sur $\mathbb{R}_+^*$, f est dérivable comme combinaison de fonctions usuelles dérivables. On a d'ailleurs

$$f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{-x + (x+1)^2 - x(x+1)}{x(x+1)^2} = \frac{1}{x(x+1)^2} > 0.$$

On en déduit le tableau de variations de f

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$
f	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$ 0

(c) Par définition de la suite (u_n)

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \ln(n) \\ &= \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) \\ &= f(n). \end{aligned}$$

(d) D'après le tableau de variations de f, on voit que $f(x) < 0$ pour tout $x > 0$. En particulier, $f(n) < 0$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, donc $u_{n+1} - u_n = f(n) < 0$ et la suite (u_n) est (strictement) décroissante.

(e) C'est un petit programme sans réelle difficulté que l'on peut faire avec une boucle `for` ou avec une compréhension de liste. On propose les deux versions.

```python
import numpy as np

def suite_u(n) :
    y=0
    for k in range(1,n+1):
        y=y+1/k
    return y-np.log(n)
```

ou bien

```python
import numpy as np

def suite_u(n) :
    return np.sum([1/k for k in range(1, n+1)])-np.log(n)
```

(2) (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} - \frac{1}{n+1} - u_n + \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \ln(n) - \ln(n+1) \\ &= \frac{1}{n} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right), \end{aligned}$$

et c'est ce qu'on voulait.

(b) On peut étudier la fonction différence ou utiliser un argument de convexité. En effet, la fonction $x \mapsto \ln(x+1)$ est concave sur $]-1;+\infty[$ (elle est de classe $\mathcal{C}^2$ et sa dérivée seconde est strictement négative). Sa courbe représentative se trouve donc au dessous de toutes ses tangentes, y compris celle en $x = 0$ qui a pour équation $y = x$, et qui donne bien l'inégalité attendue.

En appliquant cette inégalité à $x = 1/n$, on voit que $v_{n+1} - v_n \geq 0$ ou encore que (v_n) est croissante.

(c) La formule de Taylor-Young, ou une connaissance du cours permet d'écrire de développement limité à l'ordre 2 en 0 de cette fonction usuelle

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Comme $1/n \to 0$, si $n \to +\infty$, on peut utiliser ce DL dans l'expression de $v_{n+1} - v_n$:

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

ou encore

$$v_{n+1} - v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}.$$

(d) La série de terme général $1/2n^2$ est convergente comme multiple d'une série de Riemann convergente. Par critère d'équivalence pour les séries à termes positifs, la série de terme générale $v_{n+1} - v_n$ est donc de même nature c'est à dire convergente. On note alors γ la valeur de sa somme

$$\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty} (v_{n+1} - v_n).$$

(e) Le calcul de la somme partielle de la série susnommée fait apparaitre une somme télescopique;

$$\sum_{k=1}^{n-1} (v_{k+1} - v_k) = v_n - v_1 = v_n - v_n - u_1 + 1 = v_n$$

Ainsi, (v_n) est convergente et

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n-1} (v_{k+1} - v_k) = \sum_{k=1}^{n+\infty} (v_{k+1} - v_k) = \gamma.$$

(3) (a) Cette question n'étant pas vraiment formulée; on interprète l'énoncé comme une demande de justification de la convergence de (u_n) et le calcul de sa limite. On voit que

$$v_n = u_n - \frac{1}{n} \iff u_n = v_n + \frac{1}{n}.$$

Comme (v_n) converge et que $1/n \to 0$, on en déduit que (u_n) converge et a la même limite que (v_n), c'est à dire γ.

(b) (v_n) étant croissante et convergente vers γ, (u_n) étant décroissante et convergente vers γ, on a bien l'encadrement demandé

$$v_n \leq \gamma \leq u_n.$$

Ceci permet de voir que

$$0 \leq u_n - \gamma = v_n - \gamma + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n},$$

ce qui donne bien

$$|u_n - \gamma| \leq \frac{1}{n}.$$

(c) Le programme proposé permet de calculer une approximation de γ à la précision `eps` près (rentrée par l'utilisateur). En effet, une telle approximation sera réalisée par un terme u_n tel que $|u_n - \gamma| <$ `eps`, ce qui, d'après la question précédente a lieu dès que $1/n <$ `eps`. Il suffit de prendre le premier entier n tel que $n > 1/$`eps`, donné par $\lfloor$`1/eps`$\rfloor + 1$.

Partie II: Étude d'une série

Pour tout entier naturel n, on pose $a_n = \dfrac{1}{n(2n-1)}$.

(4) Le terme général de la série est équivalent à celui d'une série convergente. En effet,

$$a_n = \frac{1}{n(2n-1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2},$$

et la convergence de ce terme a été justifiée ci-avant.

(5) (a) Observons que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} \iff \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k}$$

et on reconnait une décomposition des indices de sommation selon leur parité. Plus précisément,

$$\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k} \;=\; \sum_{\substack{k=1\\ k \text{ pair}}}^{2n}\frac{1}{k}+\sum_{\substack{k=1\\ k \text{ impair}}}^{2n}\frac{1}{k}$$

Or,

$$\left\{\begin{array}{l}1\leq k\leq 2n\\ k \text{ pair}\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l}k=2j\\ 1\leq j\leq n\end{array}\right.$$

et

$$\left\{\begin{array}{l}1\leq k\leq 2n\\ k \text{ impair}\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l}k=2j-1\\ 1\leq j\leq n\end{array}\right.$$

Ainsi,

$$\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}=\sum_{\substack{k=1\\ k \text{ pair}}}^{2n}\frac{1}{k}+\sum_{\substack{k=1\\ k \text{ impair}}}^{2n}\frac{1}{k}=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2j}+\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2j-1}$$

(b) Il suffit de mettre au même dénominateur et de procéder par identification

$$\begin{aligned}\frac{1}{n(2n-1)}=\frac{\alpha}{n}+\frac{\beta}{2n-1} &\iff \frac{1}{n(2n-1)}=\frac{\alpha(2n-1)+\beta n}{n(2n-1)}\\ &\iff \left\{\begin{array}{rcl}2\alpha+\beta &=& 0\\ -\alpha &=& 1\end{array}\right.\\ &\iff \left\{\begin{array}{rcl}\alpha &=& -1\\ \beta &=& 2\end{array}\right.\end{aligned}$$

(c) On utilise les résultats des deux dernières questions

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}a_k &= -\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1} \qquad \text{(d'après 5b.)}\\ &= -\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+2\left(\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right) \qquad \text{(d'après 5a.)}\\ &= 2\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}-2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\\ &= 2\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}.\end{aligned}$$

(6) (a) On revient à la définition de u_n

$$\begin{aligned}u_{2n}-u_n+\ln(2) &= \sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}-\ln(2n)-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+\ln(n)+\ln(2)\\ &= \sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}-\ln(2)-\ln(n)+\ln(n)+\ln(2)\\ &= \sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k},\end{aligned}$$

ce qu'on attendait.

(b) D'après 5c. et 6a., on a

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{+\infty} a_k &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k \\ &= \lim_{n\to+\infty} 2\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \\ &= 2\times \lim_{n\to+\infty} (u_{2n} - u_n + \ln(2)) \\ &= 2\ln(2),\end{aligned}$$

car, comme (u_n) converge, u_{2n} et u_n ont même limite et leur différence tend vers 0.

(7) (a) On voit que

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n\left(1+\frac{k}{n}\right)} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}}.\end{aligned}$$

(b) On sait plus ou moins[1] que, si g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 g(x)\mathrm{d}x.$$

En prenant $g(x) = \ln(x+1)$, on voit que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x+1} = \ln(2),$$

et on retrouve bien la valeur précédente

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = 2\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = 2\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} = 2\ln(2).$$

[1] C'est par exemple démontré dans le sujet **EDHEC 2008**

Remarque importante: Sommes de Riemann

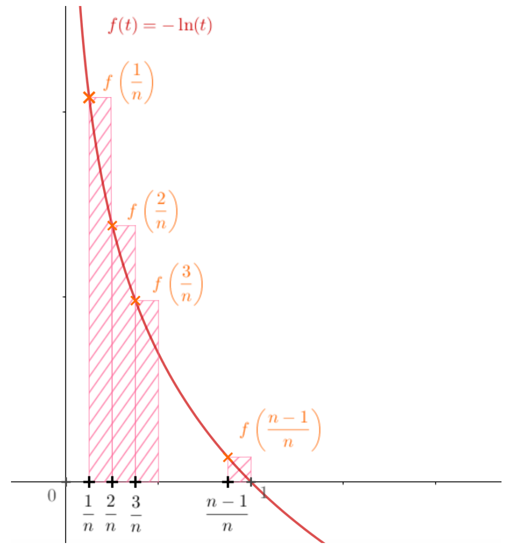
Dans cet exercice, on a entre autres utilisé le résultat suivant:

Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t.$$

Ce résultat apparait parfois sous le nom de *sommes de Riemann*[2] et fait partie du cours de première année. La preuve est **admise**, mais certains sujets peuvent avoir pour but de la démontrer ou d'en démontrer une variante (par exemple on ira voir le problème de **EDHEC 2008**). Lorsque le pas de $1/n$ tend vers 0, la somme des aires des rectangles tend vers l'intégrale.

Illustration



[2] À ne pas confondre avec les séries de Riemann ni même avec les intégrales de Riemann....