



Devoir surveillé n°4



Lundi 23 Janvier
Durée : 4 heures

Les questions précédées de (*) sont réservées aux khubes.

Problème 1

Partie 1 : Réduction d'une matrice carrée

On considère la matrice carrée $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

(1) On fournit le code Python dont le résultat de l'exécution est fourni ci-après.

```
import numpy as np
import numpy.linalg as al

A=np.array([[2,-2,2], [1, 1, 2], [-2, 0, -3]])
print (al.matrix_power(A, 3))
```

Affichage Python

```
> > >
[[ 2, -2, 2],
 [ 1, 1, 2],
 [-2, 0, -3]]
```

- (a) Déduire de l'affichage Python ci-dessus une égalité entre deux matrices.
(b) Quelles sont alors les seules valeurs propres possibles de A ?

- (2) Déterminer le spectre de A .
(3) Déterminer une matrice D diagonale dont les coefficients sont rangés dans l'ordre croissant et une matrice P inversible de première ligne $(2 \ 3 \ -2)$ telles que $A = PDP^{-1}$.
(4) Montrer que, pour tout entier $k \geq 0$, on a $A^k = PD^kP^{-1}$.

Partie 2 : Exponentielle d'une matrice carrée

Si $(a_n), (b_n), (c_n), (d_n), (e_n), (f_n), (g_n), (h_n), (i_n)$ désignent neuf suites convergentes, de limites respectives $a, b, c, d, e, f, g, h, i$, et si (M_n) est une suite de matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par

$$M_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \\ d_n & e_n & f_n \\ g_n & h_n & i_n \end{pmatrix},$$

on dit que la suite de matrices (M_n) admet une limite coefficient par coefficient, et on note

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}.$$

Si $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on pose, pour tout entier naturel n

$$S_n(M) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} M^k.$$

Lorsque $(S_n(M))$ admet une limite coefficient par coefficient, on note e^M cette limite.

(5) Deux premiers résultats théoriques. On utilisera les notations du préambule de cette partie pour les démonstrations.

(a) Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et soit (α_n) une suite réelle convergente, de limite ℓ . Montrer que la suite de matrices $(\alpha_n M)$ admet une limite coefficient par coefficient et que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n M = \ell M$$

(b) Soient (M_n) et (M'_n) deux suites de matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui admettent chacune une limite coefficient par coefficient, notées respectivement M et M' .

Montrer que la suite de matrices $(M_n M'_n)$ admet une limite coefficient par coefficient et que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n M'_n = M M'$$

(6) Montrer que, si $D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ est diagonale, alors e^D existe et vaut $e^D = \begin{pmatrix} e^a & 0 & 0 \\ 0 & e^b & 0 \\ 0 & 0 & e^c \end{pmatrix}$.

(7) Dans cette question, la matrice M est donnée par $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(a) Calculer M^2 et M^3 puis, pour tout entier k supérieur ou égal à 3, déterminer M^k .

(b) Donner, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, l'expression de $S_n(M)$. En déduire l'existence et l'expression de la matrice e^M .

(8) Dans cette question, la matrice M est donnée par $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(a) Calculer M^2 .

(b) A l'aide d'un raisonnement par récurrence, déterminer pour tout k de \mathbb{N} l'expression de M^k en fonction de k .

(c) Établir, pour tout entier naturel n , l'égalité suivante

$$S_n(M) = I + \frac{1}{3} \left(\sum_{k=0}^n \frac{3^k}{k!} - 1 \right) M.$$

(d) En déduire que e^M existe et que

$$e^M = I + \frac{e^3 - 1}{3} M.$$

(9) Dans cette question, on considère la matrice A de la Partie 1 et on fixe un réel t .

(a) Dédurre de la Question (4) que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n(tA) = PS_n(tD)P^{-1}$$

(b) Conclure que e^{tA} existe et en donner une expression sous la forme $e^{tA} = P\Delta(t)P^{-1}$.
On explicitera la matrice $\Delta(t)$ sous forme de tableau matriciel en fonction de t .

En généralisant ce résultat, on montre alors que l'exponentielle d'une matrice diagonalisable est une matrice diagonalisable (on ne demande pas de le faire).

Partie 3 : Application à un système différentiel linéaire

On considère le système différentiel

$$(\mathcal{S}) \quad \begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 2y(t) + 2z(t) \\ y'(t) = x(t) + y(t) + 2z(t) \\ z'(t) = -2x(t) - 3z(t) \end{cases}$$

où les inconnues x, y, z sont des fonctions définies de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on note

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}.$$

(10) Montrer que X est solution de (\mathcal{S}) si et seulement si, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X'(t) = AX(t)$ où A est la matrice introduite dans la Partie 1.

(11) Le système différentiel (\mathcal{S}) possède-t-il des équilibres ? Si oui, les déterminer.

(12) Montrer que les solutions du système différentiel (\mathcal{S}) peuvent s'écrire sous la forme

$$X(t) = \alpha e^{-t}U_{-1} + \beta U_0 + \gamma U_1 e^t,$$

où α, β, γ sont des constantes réelles et

$$U_{-1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad U_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad U_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(13) On considère les problèmes de Cauchy

$$(\mathcal{P}_1) \quad \begin{cases} X'(t) = AX(t) \\ X(0) = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} \end{cases} \quad \text{et} \quad (\mathcal{P}_2) \quad \begin{cases} X'(t) = AX(t) \\ X(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

- (a) (i) Déterminer l'unique solution X_1 du problème de Cauchy (\mathcal{P}_1) .
(ii) Montrer que la trajectoire associée à la solution X_1 est convergente. Expliciter le point limite (ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3) . Quelle propriété possède ce point vis-à-vis du système linéaire (\mathcal{S}) ?
- (b) (i) Déterminer l'unique solution X_2 du problème de Cauchy (\mathcal{P}_2) .
(ii) Montrer que la trajectoire associée à la solution X_2 est divergente.
- (c) On a représenté ci-après les tracés de quatre solutions du système (\mathcal{S}) . Expliciter quelles figures sont les tracés associés aux solutions X_1 et X_2 étudiées ci-avant. Justifier la réponse.

(14) On reprend les notations de la Question (3) et on considère une solution X de (\mathcal{S}) de la forme

$$X(t) = \alpha e^{-t} U_{-1} + \beta U_0 + \gamma U_1 e^t.$$

- (a) Expliciter e^{tA} pour tout $t \in \mathbb{R}$.
- (b) En posant $C = P \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$, montrer que $X(t) = e^{tA} \cdot C$.
- (c) Commenter le résultat de la dernière question, au regard des résultats du cours sur les équations différentielles du premier ordre à coefficient constant.

Figure 1

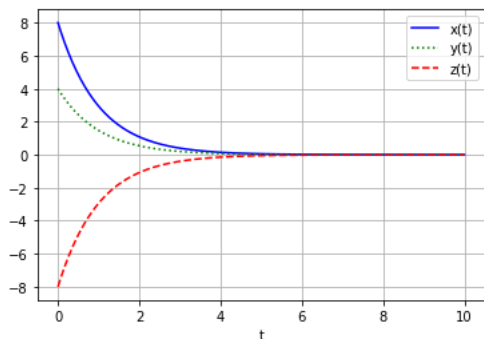


Figure 2

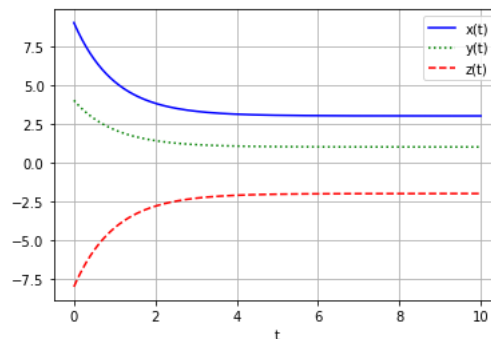


Figure 3

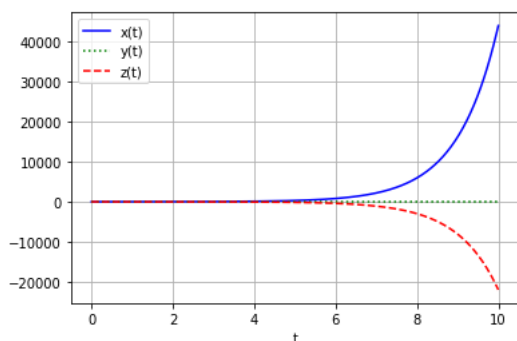
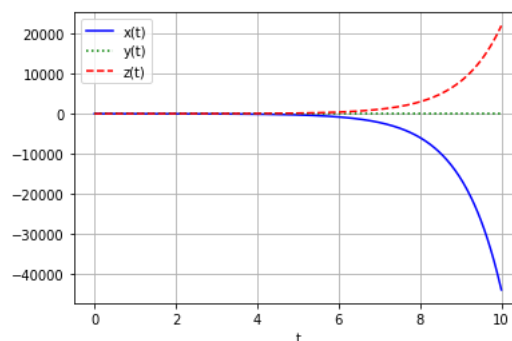


Figure 4



Problème 2

Partie 1 : Étude d'une variable aléatoire à densité

On introduit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$.

- (1) Montrer, à l'aide du changement de variable $u = 1+e^{-x}$, la convergence de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ et préciser sa valeur.
- (2) En déduire que f peut être considérée comme une densité de probabilité. Dans la suite de cette section, on note X une variable aléatoire ayant f pour densité.
- (3) Donner l'expression de la fonction de répartition F_X de X .
- (4) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) = 1 - F_X(-x)$. Quelle loi usuelle du cours admet une fonction de répartition vérifiant la même propriété?
- (5) Soit φ la fonction définie sur \mathbb{R} par $\varphi(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$.
 - (a) Justifier que φ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et dresser ton tableau de variations, limites comprises.
 - (b) Montrer que φ réalise une bijection de \mathbb{R} sur un ensemble J à préciser et déterminer l'expression de sa bijection réciproque φ^{-1} .
 - (c) On définit la variable aléatoire Y par $Y = \varphi(X)$. Montrer que $Y \hookrightarrow \mathcal{U}([-1; 1])$.
 - (d) Montrer que si $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0; 1])$, alors $2U - 1 \hookrightarrow \mathcal{U}([-1; 1])$.
 - (e) Déduire des questions précédentes l'écriture d'une fonction Python d'en-tête `def simul_X():` qui renvoie une simulation de la variable aléatoire X . *On supposera les importations habituelles déjà effectuées.*

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
```

- (6) (a) Montrer que f est paire.
- (b) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\int_0^{+\infty} t^k f(t)dt$ converge.
- (c) Déduire des questions précédentes que X admet une espérance et préciser sa valeur.
- (d) On suppose écrite avec succès la fonction Python de la Question (5e). Que devrait afficher l'exécution des commandes ci-dessus? Justifier la réponse.

```
ech=[simul_X( ) for k in range(1000)]
print(np.mean(ech))
```

Partie 2 : Variables aléatoires symétriques

Une variable aléatoire (discrète ou à densité) Z est dite symétrique si elle suit la même loi que la variable aléatoire $-Z$.

- (7) Montrer que si Z est une variable aléatoire ayant pour densité une fonction g paire, alors Z est symétrique.
- (8) (a) À quelle condition nécessaire et suffisante une variable aléatoire presque sûrement constante est symétrique.
- (b) Donner un exemple de variable aléatoire discrète (ou finie) symétrique non presque sûrement constante.

(c) Quelle loi usuelle à densité du cours est symétrique?

(9) (a) Soit Z une variable aléatoire symétrique. Montrer que

$$P(Z > 0) = \frac{1}{2} (1 - P(Z = 0))$$

(b) On suppose que Z est une variable aléatoire symétrique, à densité. Soit $x \in \mathbb{R}$. Donner une relation entre $P(Z \leq x)$ et $P(Z \leq -x)$.

(10) Soit Z une variable aléatoire symétrique à densité, de fonction de répartition F_Z . On considère une variable aléatoire finie ε de loi $\varepsilon \hookrightarrow \mathcal{U}(\{-1; 1\})$ supposée indépendante de Z .

(a) Justifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $P(\varepsilon|Z| \leq x) = \frac{1}{2} (P(|Z| \geq -x) + P(|Z| \leq x))$.

(b) En déduire que Z et $\varepsilon|Z|$ suivent la même loi.

(11) (a) Soient X une variable aléatoire à densité à valeurs positives admettant une espérance et $\varepsilon \hookrightarrow \mathcal{U}(\{-1; 1\})$ supposée indépendante de X . Montrer que εX est encore une variable à densité, de densité paire. Que dire de $E(\varepsilon X)$?

(b) Soit Z une variable aléatoire symétrique à densité telle que $|Z|$ admet une espérance. Montrer que Z admet une espérance et que celle-ci est nulle.

(12) Soient $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ et $\varepsilon \hookrightarrow \mathcal{U}(\{-1; 1\})$ supposées indépendantes. On note $W = \varepsilon Y$.

(a) Montrer que W est une variable aléatoire symétrique à densité, de densité h à préciser.

(b) La fonction h est-elle paire ?