Math ECG 2. 2022-2023

Mathématiques Appliquées - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`
ENC Bessières, Paris 17e.

Devoir surveillé n°4

Solution

Problème 1

*Ce problème est le fruit d'un travail commun avec mes collègues Tom Dutilleuil (Carnot, Paris 17e) et Louis Merlin (Dumas, St Cloud). La partie avec l'exponentielle de matrice s'inspire d'un sujet **HEC**, voie T, de 2007.*

Le premier des deux collègues susmentionnés ayant déjà posé ce sujet et rédigé une solution, on y renvoie. Elle est disponible en cliquant *ici*.

Problème 2

Partie 1 : Étude d'une variable aléatoire à densité

On introduit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$.

(1) L'intégrale est impropre en $-\infty$ et en $+\infty$ il y a donc *a priori* deux intégrales dont on doit montrer la convergence, sauf si on a lu le reste de l'exercice et anticipé du caractère paire de la fonction f, ce qui permettra de se limiter à l'intégrale entre 0 et $+\infty$. Montrons donc que f est paire dès maintenant. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$f(-x) = \frac{e^{-(-x)}}{(1+e^{-(-x)})^2} = \frac{e^{x}}{(1+e^{x})^2} = \frac{e^{x}}{(e^x(e^{-x}+1))^2} = \frac{e^{x}}{e^{2x}(e^{-x}+1)^2} = f(x)$$

et f est bien paire. Soit maintenant $A > 0$. Comme suggéré par l'énoncé, on pose

$$u = u(t) = 1 + e^{-t} \rightsquigarrow \mathrm{d}u = -e^{-t}\mathrm{d}t$$

Comme u est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; A]$, le changement de variable est licite et donne

$$\begin{aligned}
\int_0^A f(t)\mathrm{d}t &= \int_2^{1+e^{-A}} \frac{-\mathrm{d}u}{u^2} = \int_{1+e^{-A}}^2 \frac{\mathrm{d}u}{u^2} \\
&= \left[-\frac{1}{u}\right]_{1+e^{-A}}^2 \\
&= \frac{1}{1+e^{-A}} - \frac{1}{2} \\
&\underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Par parité de f, on a bien la convergence de l'intégrale demandée et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = 2\int_{0}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = 1.$$

(2) D'après la question précédente, il reste seulement à vérifier que f est continue (sauf peut-être en un nombre fini de points) et qu'elle est positive partout sur $\mathbb{R}$. C'est clairement le cas:

- Les fonctions $x \mapsto e^{-x}$ et $x \mapsto (1+e^{-x})^2$ sont continues comme combinaisons/puissances de fonctions usuelles définies avec l'exponentielle et la seconde ne s'annule jamais. Par quotient, f est alors continue sur $\mathbb{R}$.

- Comme $e^{-x} > 0$ pour tout x, il est immédiat que $f(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Au final, f est bien une densité de probabilité.
Dans la suite de cette section, on note X une variable aléatoire ayant f pour densité.

(3) On va à nouveau utiliser un changement de variable pour calculer $F_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Commençons par poser $B < x$. Par le même changement de variable que précédemment, on peut écrire

$$\begin{aligned}
\int_{B}^{x} f(t)\mathrm{d}t &= \int_{1+e^{-B}}^{1+e^{-x}} \frac{-\mathrm{d}u}{u^2} \\
&= \left[\frac{1}{u}\right]_{1+e^{-B}}^{1+e^{-x}} = \frac{1}{1+e^{-x}} - \frac{1}{1+e^{-B}} \\
&\underset{B\to-\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1+e^{-x}}
\end{aligned}$$

Et on peut alors conclure que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$.

(4) Soit $x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) = 1 - F_X(-x)$.

$$\begin{aligned}
1 - F_X(-x) &= 1 - \frac{1}{1+e^{x}} = \frac{e^x}{1+e^x} \\
&= \frac{e^x}{e^x(e^{-x}+1)} = \frac{1}{1+e^{-x}} \\
&= F_X(x)
\end{aligned}$$

Cette propriété de *symétrie* est aussi partagé par la fonction de répartition de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

(5) Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \dfrac{e^x-1}{e^x+1}$.

(a) La fonction φ est quotient de fonctions usuelles de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, dont le dénominateur ne s'annule pas. Ainsi, φ est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\varphi'(x) = \frac{e^x(e^x+1) - e^x(e^x-1)}{(1+e^x)^2} = \frac{2e^x}{(1+e^x)^2} > 0$$

et φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Comme on a clairement

$$\varphi(x) \sim \frac{e^x}{e^x} = 1 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1, \qquad \varphi(x) \sim \frac{-1}{1} = -1 \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -1$$

on peut dresser le tableau de variations complet de φ:

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$\varphi'(x)$	$+$
$\varphi(x)$	$-1 \nearrow 1$

(b) Par théorème de bijection, φ étant strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}$, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $J =]-1,1[$. De plus, pour tout $y \in]-1,1[$,

$$\begin{aligned}
\varphi(x) = y &\iff \frac{e^x-1}{e^x+1} = y \\
&\iff e^x - 1 = y(e^x+1) \\
&\iff e^x(1-y) = 1+y \\
&\iff e^x = \frac{1+y}{1-y} \\
&\iff x = \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)
\end{aligned}$$

et on peut alors conclure que

$$\varphi^{-1}(y) = \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right).$$

(c) On définit la variable aléatoire Y par $Y = \varphi(X)$. On détermine la loi de Y en explicitant sa fonction de répartition mais commençons par observer que, φ étant à valeurs dans $]-1,1[$, on a $Y(\Omega) =]-1,1[$ et donc, pour tout $x \leq 1$, $F_Y(x) = P(Y \leq x) = 0$ et pour tout $x \geq 1$, $F_Y(x) = 1$. Pour $x \in]-1,1[$, on a

$$\begin{aligned}
F_Y(x) &= P(Y \leq x) = P(\varphi(X) \leq x) \\
&= P\left(X \leq \varphi^{-1}(x)\right) \qquad\qquad \text{car } \varphi \text{ bijection croissante} \\
&= F_X\left(\varphi^{-1}(x)\right) = F_X\left(\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)\right) \\
&= \frac{1}{1+\exp\left(-\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right)} = \frac{1}{1+\frac{1-x}{1+x}} \\
&= \frac{x+1}{2}
\end{aligned}$$

Au final, on a $F_Y(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq -1 \\ \dfrac{x+1}{2}, & \text{si } -1 < x < 1 \\ 1, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

On reconnait la fonction de répartition de la loi uniforme $\mathcal{U}([-1;1])$ et on peut donc conclure que $Y \hookrightarrow \mathcal{U}([-1;1])$.

(d) Question classique sur la transformation affine d'une loi uniforme. A savoir faire *fingers in the nose.* Notons $V = 2U - 1$ et observons que $V(\Omega) = [-1, 1]$. Ainsi $F_V(x) = 0$ si $x < -1$ et $F_V(x) = 1$ si $x > 1$. Soit $x \in [-1, 1]$.

$$\begin{aligned} F_V(x) &= P(V \leq x) = P(2U - 1 \leq x) = P\left(U \leq \frac{x+1}{2}\right) = F_U\left(\frac{x+1}{2}\right) \\ &= \frac{x+1}{2}, \end{aligned}$$

car si $x \in [-1, 1]$ alors $(x+1)/2 \in [0; 1]$. On reconnait encore l'expression de la fonction de répartition de la loi $\mathcal{U}([-1; 1])$ et on a bien le résultat demandé.

(e) C'est un processus classique de simulation par inversion. On va simuler U (avec `rd.random()`) puis simuler V grâce à la question précédente et $\varphi^{-1}(V)$ renverra une simulation de X toujours d'après les questions précédentes.

```
def simul_X( ):
    U=rd.random()
    V=2*U-1
    return np.log((1+V)/(1-V))
```

(6) (a) On a déjà répondu à cette question lors de la toute première question du problème à laquelle on renvoie.

(b) Cette intégrale est impropre en $+\infty$. Sur $[0; 1]$ il s'agit de l'intégrale d'une fonction continue. On ne s'intéresse donc à la convergence que de l'intégrale sur $[1, +\infty[$. Or, par croissance comparée, il es immédiat de voir que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$t^k f(t) = \frac{t^k e^{-t}}{(1 + e^{-t})^2} \sim t^k e^{-t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right), \qquad t \to +\infty$$

et bien sûr, par critère de Riemann, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ converge.

Par critère de comparaison par négligeabilité pour les intégrales de fonctions positives, on a bien convergence de l'intégrale étudiée.

(c) On sait que

$$X \text{ admet une espérance} \iff \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t \text{ converge absolument}$$

Or, comme f est paire, la fonction $t \mapsto tf(t)$ est impaire. On sait par la question précédente que l'intégrale, sur $[0; +\infty[$ de $tf(t)$ converge. On peut donc conclure que $E(X)$ existe et que

$$E(X) = 0.$$

(d) Les commandes proposées créent une liste de 1000 simulations de X et affichent la moyenne des valeurs obtenues. Il s'agit donc d'une valeur approchée de l'espérance de X, qu'on sait être égale à 0. La valeur affichée devrait donc être très proche de 0.

Partie 2 : Variables aléatoires symétriques

Une variable aléatoire (discrète ou à densité) Z est dite symétrique si elle suit la même loi que la variable aléatoire $-Z$.

(7) Soit Z une variable aléatoire de densité g paire. Alors, en effectuant le changement de variable affine (donc licite) $u = -t$ qui donne $\mathrm{d}u = -\mathrm{d}t$, on a

$$\begin{aligned} F_{-Z}(x) &= P(-Z \leq x) = P(Z \geq -x) \\ &= \int_{-x}^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t = \int_{x}^{-\infty} g(-u)(-\mathrm{d}u) \\ &= \int_{-\infty}^{x} g(u)\mathrm{d}u \qquad\qquad \text{(car } g \text{ est paire)} \\ &= P(Z \geq x) = F_Z(x) \end{aligned}$$

et $-Z$ suit bien la même loi que Z ce qui veut dire que Z est symétrique.

(8) (a) Si $Z = a$ est une v.a constante symétrique alors $-Z = -a = Z = a$ et $a = 0$. Réciproquement, il est clair que la v.a constante nulle est symétrique. C'est la seule variable aléatoire constante symétrique.

(b) Pour chercher ce type d'exemple, on commence par raisonner avec des choses simples. On veut une variable aléatoire finie mais pas constante. On va donc chercher une v.a X prenant 2 valeurs a et b, comme on veut que $-X$ ait la même loi (et donc le même univers image) que X, il faut que $\{-a; -b\} = \{a, b\}$. On pense tout de suite à prendre $a = -1$ et $b = 1$. Ensuite on veut

$$P(X = 1) = P(-X = 1) = P(X = -1).$$

Ceci impose la probabilité ci-dessus soit égale à 1/2 et donc que $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\{-1, 1\})$. Il est immédiat de vérifier que cette loi satisfait bien la définition de v.a symétrique.

(c) Bien entendu on a tout de suite, dès la définition, pensé à la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$. Sa fonction de densité étant paire, elle vérifie bien la définition de variable aléatoire symétrique.

(9) (a) Soit Z une variable aléatoire symétrique. Comme

$$[Z \neq 0] = [Z < 0] \cup [Z > 0]$$

et que cette union est disjointe, on a

$$P(Z = 0) = 1 - P(Z \neq 0) = 1 - (P(Z < 0) + P(Z > 0)) = 1 - 2P(Z > 0)$$

car Z est symétrique: en effet, $P(Z < 0) = P(-Z > 0) = P(Z > 0)$. Il suit bien que

$$P(Z > 0) = \frac{1}{2}\left(1 - P(Z = 0)\right).$$

(b) On suppose que Z est une variable aléatoire symétrique, à densité. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$P(Z \leq -x) = P(-Z \geq x) = 1 - P(-Z < -x) = 1 - P(Z < x) = 1 - P(Z \leq x)$$

car Z et $-Z$ suivent la même loi et sont à densité.

(10) Soit Z une variable aléatoire symétrique à densité, de fonction de répartition F_Z. On considère une variable aléatoire finie ε de loi $\varepsilon \hookrightarrow \mathcal{U}(\{-1; 1\})$ supposée indépendante de Z.

(a) Notons que Z et ε étant indépendantes, les variables $|Z|$ et ε le sont encore par le lemme des coalitions. Par la formule des probabilités totales appliquée au s.c.e $\{[\varepsilon = 1], [\varepsilon = -1]\}$, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} P(\varepsilon|Z| \leq x) &= P(\varepsilon|Z| \leq x \cap [\varepsilon = 1]) + P(\varepsilon|Z| \leq x \cap [\varepsilon = -1]) \\ &= P(|Z| \leq x \cap [\varepsilon = 1]) + P(-|Z| \leq x \cap [\varepsilon = -1]) \\ &= P(|Z| \leq x)P(\varepsilon = 1) + P(|Z| \geq -x)P(\varepsilon = -1) \qquad \text{par indépendance de } \varepsilon \text{ et } |Z|) \\ &= \frac{1}{2}\left(P(|Z| \geq -x) + P(|Z| \leq x)\right), \end{aligned}$$

ce qui est la formule demandée.

(b) Commençons par voir que

$$P(|Z| \geq -x) \;=\; P(Z \geq -x) + P(Z \leq x) = P(-Z \leq x) + P(Z \leq x) = 2P(Z \leq x)$$

car Z est symétrique. De plus, toujours car Z est symétrique,

$$P(|Z| \leq x) = P(Z \leq x) - P(Z < -x) = P(Z \leq x) - 1 + P(Z \leq x) = 2P(Z \leq x) - 1.$$

On distingue alors deux cas :

- Si $x \geq 0$, alors $P(|Z| \geq -x) = 1$, et il suit que

$$P(\varepsilon|Z| \leq x) = \frac{1}{2}\left(P(|Z| \geq -x) + P(|Z| \leq x)\right) = \frac{1}{2}\left(1 + 2P(Z \leq x) - 1\right) = P(Z \leq x).$$

- Si $x < 0$, alors $P(|Z| \leq x) = 0$ et

$$P(\varepsilon|Z| \leq x) = \frac{1}{2}\left(P(|Z| \geq -x) + 0\right) = \frac{1}{2}\left(2P(Z \leq x)\right) = P(Z \leq x)$$

Dans les deux cas

$$P(\varepsilon|Z| \leq x) = P(Z \leq x)$$

et on conclut Z et $\varepsilon|Z|$ suivent la même loi.

(11) (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a, par la FPT appliquée au s.c.e $\{[\varepsilon = 1], [\varepsilon = -1]\}$,

$$\begin{aligned} P(\varepsilon X \leq x) &= P([\varepsilon X \leq x] \cap [\varepsilon = 1]) + P([\varepsilon X \leq x] \cap [\varepsilon = -1]) \\ &= P([X \leq x] \cap [\varepsilon = 1]) + P([X \geq -x] \cap [\varepsilon = 1]) \\ &= \frac{1}{2}\left(F_X(x) + 1 - F_X(-x)\right) \end{aligned}$$

Comme X est à densité, F_X est continue partout et de classe $\mathcal{C}^1$ partout (sauf peut être en un nombre fini de point). Par composition avec $x \mapsto -x$ et par somme, il en est donc de même pour $F_{\varepsilon x}$ et la variable εX est donc à densité. Une densité s'obtient par

$$f_{\varepsilon X}(x) = F'_{\varepsilon x}(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) + f(-x)\right).$$

Notamment cette densité est paire. Comme X admet une densité et que X est à valeurs positives, on sait que $f(t) = 0$ si $t < 0$ et que

$$\int_0^{+\infty} t f(t) \mathrm{d}t$$

converge. Observant maintenant que $t \mapsto t f_{\varepsilon X}(t)$ est impaire et que, pour $t \geq 0$

$$t f_{\varepsilon X}(t) = \frac{1}{2} t f(t)$$

on a donc la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} t f_{\varepsilon X}(t)\mathrm{d}t$ ou encore l'existence de $E(\varepsilon X)$ qui vaut donc 0.
On pouvait l'anticiper, l'espérance du produit de variables indépendantes est égale au produit des espérances, mais bien sûr $E(\varepsilon) = 0$. Sauf que... ce résultat est vrai si les deux variables sont toutes deux discrètes (ou toutes deux continues)....

(b) Soit Z une variable aléatoire symétrique à densité telle que $|Z|$ admet une espérance. D'après la question précédente, en prenant $\varepsilon \hookrightarrow \mathcal{U}(\{-1;1\})$ indépendante de Z (et donc indépendante de $|Z|$ par le lemme des coalitions), $\varepsilon|Z|$ admet une espérance qui est nulle. Or on a vu plus haut que $\varepsilon|Z|$ et Z ont dans ce cas la même loi, donc Z admet une espérance et celle-ci est nulle.

(12) Soient $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ et $\varepsilon \hookrightarrow \mathcal{U}(\{-1;1\})$ supposées indépendantes. On note $W = \varepsilon Y$.

(a) Encore une fois, on passe par la fonction de répartition de W et la formule des probabilités totales avec le même s.c.e que précédemment. Comme $Y(\Omega) = \mathbb{R}_+$, on a $W(\Omega) = \mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} F_W(x) &= P(W \leq x) = P([\varepsilon Y \leq x] \cap [\varepsilon = 1]) + P([\varepsilon Y \leq x] \cap [\varepsilon = -1]) \\ &= P([Y \leq x] \cap [\varepsilon = 1]) + P([-Y \leq x] \cap [\varepsilon = -1]) \\ &= \frac{1}{2}\left(P(Y \leq x) + 1 - P(Y \leq -x)\right) \end{aligned}$$

Il faut alors distinguer $x \geq 0$ et $x < 0$.

- Si $x \geq 0$, alors $-x \leq 0$ et $P(Y \leq -x) = 0$ ce qui donne
$$F_W(x) = \frac{1}{2}\left(2 - e^{-\lambda x}\right)$$
- Si $x < 0$ alors $-x > 0$ et $P(Y \leq x) = 0$ ce qui donne
$$F_W(x) = \frac{1}{2}\left(e^{\lambda x}\right)$$

Bilan
$$F_W(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{\lambda x}, & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2}\left(2 - e^{-\lambda x}\right), & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

On commence par bien dire que F_W est bien continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et sur $\mathbb{R}_-$ pour garantir que W est une variable à densité. On vérifie qu'elle est symétrique

$$P(-W \leq x) = P(W \geq -x) = 1 - P(W \leq -x)$$

On distingue encore $x \geq 0$ et $x < 0$.

- Si $x \geq 0$, alors $-x \leq 0$ et on a
$$P(-W \leq x) = 1 - \frac{1}{2}e^{-\lambda x}$$
- Si $x < 0$, alors $-x > 0$ et on a
$$P(-W \leq x) = 1 - \frac{1}{2}\left(2 - e^{\lambda x}\right) = \frac{1}{2}e^{\lambda x}$$

Dans les deux cas, $F_{-W}(x) = F_W(x)$ et W est bien symétrique.
Une densité de W est donnée par

$$h(x) = F'_W(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{2} e^{\lambda x}, & \text{si } x < 0 \\ \\ \dfrac{\lambda}{2} e^{-\lambda x}, & \text{si } x \geq 0 \end{cases} = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda |x|}.$$

(b) Oui, il est immediat de voir que la fonction h est encore paire.