Devoir surveillé n°5

Samedi 24 Mars
Durée : 4 heures

Exercice 1

(1) (a) Rappeler l'expression de la densité φ d'une loi normale centrée réduite puis montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$ converge et vaut $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

On admet alors que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ converge et vaut $\sqrt{\pi}$.

(b) En déduire que pour tout réel x , l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ est convergente.

(c) Montrer que la fonction $h : x \mapsto \displaystyle\int_0^{x} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et donner $h'(x)$ pour tout réel x.

(d) Déduire des questions précédentes que la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que $g'(x) = -\mathrm{e}^{-x^2}$ pour tout réel x.

Dans toute la suite de l'exercice, on note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \mathrm{e}^{x^2}\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$$

(2) Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et montrer que f' vérifie la relation :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = -1 + 2xf(x)$$

(3) Montrer que la fonction f est positive sur $\mathbb{R}$ et préciser $f(0)$.

(4) (a) Déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}_-$.
(b) Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$.

(5) (a) Montrer que pour tout réel $x \geq 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} 2t\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ est convergente et déterminer sa valeur (en fonction de x).
(b) En déduire pour tout réel $x \geq 0$, l'inégalité : $\quad 2xf(x) \leq 1$.
(c) En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}_+$.
(d) En déduire également la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

(6) On admet que f est convexe sur $\mathbb{R}$.
Tracer une allure de la courbe représentative de f ainsi que sa tangente en 0.
On donne $\sqrt{\pi} \simeq 1,77$.

(7) Justifier rapidement à l'aide de la question 2 que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

On pose $f^{(0)} = f$ et pour tout entier $k \geq 1$, on note $f^{(k)}$ la dérivée k-ième de f.
On admet que pour tout entier naturel n, la fonction f admet au voisinage de 0 un développement limité d'ordre n qui s'écrit

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o\left(x^n\right), \qquad \text{avec} \qquad a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}.$$

(8) (a) Calculer a_0 et a_1.
(b) Établir pour tout entier $n \geq 1$, la relation

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n+1)}(x) = 2x f^{(n)}(x) + 2n f^{(n-1)}(x).$$

(c) En exprimant $f^{(2k+2)}(0)$ en fonction de $f^{(2k)}(0)$, montrer que : $\forall k \geq 0, \; a_{2k+2} = \dfrac{1}{k+1} a_{2k}$.
(d) En déduire que pour tout entier $k \geq 0, \; a_{2k} = \dfrac{1}{k!}\sqrt{\pi}$.
(e) Adapter le raisonnement pour montrer que

$$\forall k \geq 1, \qquad a_{2k+1} = \frac{2}{2k+1} a_{2k-1}$$

puis que

$$a_{2k+1} = -\frac{4^k k!}{(2k+1)!}.$$

Exercice 2

Partie 1 : La loi binomiale négative

Toutes les variables aléatoires intervenant dans cet exercice sont supposées définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
Soit p un réel vérifiant $0 < p < 1$. On pose $q = 1-p$. On dispose d'une urne contenant des boules rouges en proportion p et des boules vertes en proportion q. On effectue dans cette urne une suite de tirages d'une boule avec remise jusqu'à ce que l'on obtienne une boule rouge. On suppose que les résultats des différents tirages sont indépendants.
Pour tout i de $\mathbb{N}^*$, on note R_i (resp. V_i) l'événement : " le i-ième tirage amène une boule rouge (resp. verte) ". Ainsi, on a : $\forall i \in \mathbb{N}^*, \; P(R_i) = p$ et $P(V_i) = q$.
On note Z la variable aléatoire égale au nombre de boules vertes obtenues avant l'apparition de la première boule rouge et on pose $Z = -1$ si l'on n'obtient jamais une boule rouge.

(1) (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $P([Z = n]) = pq^n$.
(b) Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} P([Z = n])$ et en déduire la valeur de $P([Z = -1])$.

(2) (a) Montrer que la variable aléatoire $Z + 1$ suit une loi géométrique de paramètre p.
(b) En déduire que Z admet une espérance et que $E(Z) = \dfrac{q}{p}$.
(c) En déduire que Z admet une variance et préciser sa valeur.

On dira qu'une variable aléatoire X suit la loi binomiale négative de paramètre p si elle suit la même loi que Z. Ainsi, on retiendra le résultat noté $(\star)$ suivant, utile pour la suite :
Si X suit la loi binomiale négative de paramètre p alors

$$(\star) \qquad X(\Omega) = \mathbb{N}; \quad \forall n \in \mathbb{N},\ P([X = n]) = pq^n \qquad \text{et} \qquad E(X) = \frac{q}{p}.$$

(3) Simulation informatique.

(a) Compléter la fonction `BinomNeg(p)` suivante qui prend en paramètre un réel $p \in]0;1[$ et qui simule la variable Z et donc une variable aléatoire suivant une loi binomiale négative de paramètre p.

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

def BinomNeg(p) :
    S = .............
    while rd.rand() ............. :
        .............
    return S
```

(b) Compléter la fonction `BinomNeg2(p)` suivante qui prend en paramètre un réel $p \in];1[$ et qui simule également une variable aléatoire suivant une loi binomiale négative de paramètre p, cette fois en utilisant le résultat de la question 2a.
On rappelle que la commande "`rd.geometric(p)`" renvoie une réalisation d'une loi géométrique de paramètre p.

```
def BinomNeg2(p) :
    G = rd.geometric(p)
    return .............
```

Partie 2 : Un calcul statistique

Soient X_1, X_2 et X_3 trois variables aléatoires indépendantes de même loi binomiale négative de paramètre p.
On pose : $T = X_1 + X_2$ et $W = X_2 + X_3$.

(4) Soit $n \in \mathbb{N}$. On rappelle que, si $(x_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ et $(y_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ sont deux séries statistiques,

- on désigne par $\text{cov}(x, y)$ la covariance empirique de la série statistique double (x_i, y_i) :

$$\text{cov}(x, y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i - \overline{x} \cdot \overline{y}$$

  avec $\overline{x}$ (resp. $\overline{y}$) qui désignent la moyenne empirique associée à (x_i) (resp. (y_i));

- on note $\rho(x, y)$ le coefficient de corrélation linéaire empirique de cette même série statistique double :

$$\rho_{x,y} = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sigma_x \sigma_y},$$

  avec σ_x et σ_y qui désignent les écarts-types empiriques des séries (x_i) et (y_i).

(a) *On rappelle que la commande "`np.mean(x)`" renvoie la moyenne empirique des éléments de `x`.*
Compléter les fonctions suivantes pour que la seconde calcule le coefficient de corrélation linéaire empirique des séries `X` et `Y` données en paramètre.

```
def Covariance(X,Y) :
    return ...............................
```

```
def CoeffCorr(X,Y) :
    CovXY = Covariance(X,Y)
    VarX = .............    # variance empirique de X
    VarY = .............    # variance empirique de Y
    return ........................
```

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On souhaite construire deux séries statistiques (t_i) et (w_i) associées aux variables T et W (définies plus haut) et calculer leur coefficient de corrélation linéaire empirique.

(i) Compléter la fonction suivante pour qu'elle simule deux séries statistiques (de longueur n) (t_i) et (w_i) associées aux variables T et W.

```
def Simu_TW(p,n) :
    X_1 = np.zeros(n)
    X_2 = np.zeros(n)
    X_3 = np.zeros(n)
    for i in range(n) :
        X_1[i] = ............. # série de valeurs de X1
        X_2[i] = ............. # série de valeurs de X1
        X_3[i] = ............. # série de valeurs de X1
    return ( ....... , ....... ) # renvoie (t_i) et (w_i)
```

(ii) On considère le script Python suivant

```
val_p = np.arange(0.1,1,0.2)
# val_p est une liste de valeurs pour p entre 0.1 et 0.9
for p in val_p :
    T,W = Simu_TW(p,10000)
    print(CoeffCorr(T,W))
```

qui renvoie le résultat suivant

Affichage Python

```
>>>
0.5082364877696511
0.4924050605018343
0.49424137980025185
0.5048354509961391
0.5350220088999194
```

Que peut-on conjecturer sur la valeur du coefficient de corrélation empirique $\rho_{t,w}$ de (t_i) et (w_i) en fonction des valeurs de p ?

(5) On rappelle que X_1, X_2 et X_3 trois variables aléatoires indépendantes de même loi binomiale négative de paramètre p et que : $T = X_1 + X_2$ et $W = X_2 + X_3$.

(a) Montrer que $\mathrm{Cov}(T, W) = V(X_2)$. Les variables aléatoires T et W sont-elles indépendantes?

(b) Montrer que $V(T) = V(W) = 2V(X_2)$ puis calculer le coefficient de corrélation linéaire $\rho(T, W)$ des variables aléatoires T et W.
Votre conjecture de la question 4(b)ii est-elle vérifiée ?

Partie 3 : Une matrice aléatoire

Soient S_1 et S_2 deux variables aléatoires indépendantes, et suivant toutes les deux la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On pose $T_1 = \lfloor S_1 \rfloor$ la partie entière de S_1 et $T_2 = \lfloor S_1 \rfloor$ la partie entière de S_2. On a donc :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ (T_1 = k) = (k \leq S_1 < k+1) \quad \text{et} \quad (T_2 = k) = (k \leq S_2 < k+1).$$

(6) (a) Donner la fonction de répartition de S_1.
(b) Pour tout entier k, calculer $P(T_1 = k)$ puis en déduire que T_1 suit une loi binomiale négative de paramètre $p_\lambda = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda}$.
On remarquera que T_2 suit la même loi que T_1.

(7) (a) Justifier que T_1 et T_2 sont indépendantes.
(b) On note $q_\lambda = 1 - p_\lambda$. Montrer que : $P(T_1 = T_2) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} p_\lambda^2 q_\lambda^{2k}$.
(c) Calculer alors $P(T_1 = T_2)$ en fonction de p_λ et q_λ puis vérifier que $P(T_1 = T_2) = \dfrac{1 - \mathrm{e}^{-\lambda}}{1 + \mathrm{e}^{-\lambda}}$.

(8) On considère la matrice aléatoire $M = \begin{pmatrix} 1 & T_1 \\ 1 & T_2 \end{pmatrix}$.
(a) Montrer que M est inversible si, et seulement si, on a : $T_1 \neq T_2$
(b) En déduire que la probabilité p_1 que M soit inversible est : $p_1 = \dfrac{2e^{-\lambda}}{1 + e^{-\lambda}}$.

Partie 4 : Loi du maximum

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi binomiale négative de paramètre p (définies par la relation $(\star)$).
On pose : $U = \max(X, Y)$ et $V = \min(X, Y)$.

(9) Montrer que la loi du couple (U, V) est donnée par :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ P([U = i] \cap [V = j]) = \begin{cases} 2p^2 q^{i+j}, & \text{si } i > j \\ 0, & \text{si } i < j \\ p^2 q^{2i}, & \text{si } i = j \end{cases}$$

(10) (a) Montrer que : $\forall j \in \mathbb{N},\ P([V = j]) = \displaystyle\sum_{i=j}^{+\infty} P([U = i] \cap [V = j])$.
(b) En déduire que : $\forall j \in \mathbb{N},\ P([V = j]) = p\,(1+q)\,q^{2j}$.
(c) En déduire que V suit une loi binomiale négative de paramètre $(1 - q^2)$.
(d) En déduire que V admet une espérance et que $E(V) = \dfrac{q^2}{1 - q^2}$.

(11) (a) Justifier que $U + V = X + Y$.
(b) En déduire que U admet une espérance et expliquer (sans faire les calculs) comment on pourrait obtenir sa valeur.

Exercice 3

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = x^{n+1} + x^n.$$

(1) (a) Justifier que f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifier que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f_n'(x) = x^{n-1}((n+1)x + n).$$

(b) En déduire, suivant la parité de n, le tableau de variations de f_n.

(c) Montrer que dans tous les cas

$$f_n\left(-\frac{n}{n+1}\right) < 2.$$

(d) Calculer $f_n(1)$ et en déduire, suivant la parité de n, le nombre de solutions de l'équation d'inconnue x

$$x^{n+1} + x^n = 2.$$

(2) On introduit la matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Justifier que A est diagonalisable et expliciter son spectre.

(b) Déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.

(c) Expliciter P^{-1}.

(3) On considère l'équation matricielle d'inconnue X matrice carrée de taille 2

$$(E_n) \quad X^{n+1} + X^n = A.$$

(a) En posant $Y = P^{-1}XP$, montrer que X solution de (E_n) est équivalent à Y solution de

$$(E_n') \quad Y^{n+1} + Y^n = D.$$

(b) Soit Y une solution de (E_n'). On pose

$$Y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

(i) Montrer que, si Y solution de (E_n'), alors Y et D commutent.

(ii) En déduire que $b = c = 0$.

(iii) Quelle sont les valeurs possibles de a?

(iv) Discuter, suivant les valeurs de n, le nombre de solutions de l'équation (E_n).

(c) On note α la solution négative de l'équation numérique $x^4 + x^3 = 2$. Déterminer les solutions de l'équation (E_3) à l'aide de α.