Math ECG 2. 2022-2023

Mathématiques Appliquées - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`
ENC Bessières, Paris 17e.

Devoir surveillé n°5

Der des der
Solution

Exercice 1

Cet exercice est proposé par mon collègue Sofiane Akkouche (René Cassin, Bayonne).
On renvoie à sa solution (Exercice 3).

Exercice 2

Cet exercice est proposé par mon collègue Sofiane Akkouche (René Cassin, Bayonne).
On renvoie à sa solution (Exercice 2).

Exercice 3

Cet exercice provient d'un très vieux sujet **ESCP 1998**.

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = x^{n+1} + x^n.$$

(1) (a) La fonction f_n est polynomiale donc définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout x réel, sa dérivée vaut $f_n'(x) = (n+1)x^n + nx^{n-1} = x^{n-1}((n+1)x + n)$. Il suit alors que, le signe de cette dérivée va dépendre de la parité de n, car, selon cette parité, x^{n-1} sera toujours positif ou nul ou changera de signe en zéro. Plus précisément,

- si n est pair, alors $n-1$ est impair et on a le tableau suivant

x	$-\infty$		$\frac{-n}{n+1}$		0		$+\infty$
x^{n-1}		$-$		$-$	0	$+$	
$(n+1)x+n$		$-$	0	$+$		$+$	
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f_n	$-\infty$	↗	$f_n\left(-\frac{n}{n+1}\right)$	↘	0	↗	$+\infty$

- si n est impair, alors $n-1$ est pair et on a le tableau suivant

x	$-\infty$		$\frac{-n}{n+1}$		0		$+\infty$
x^{n-1}		$+$		$+$	0	$+$	
$(n+1)x+n$		$-$	0	$+$		$+$	
$f_n'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
f_n	$+\infty$	↘	$f_n\left(-\frac{n}{n+1}\right)$	↗	0	↗	$+\infty$

(b) Dans tous les cas, on a

$$\begin{aligned} f_n\left(-\frac{n}{n+1}\right) &= \left(-\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} + \left(-\frac{n}{n+1}\right)^{n} \\ &= (-1)^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\left(1-\frac{n}{n+1}\right) \\ &= (-1)^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Comme $\frac{n}{n+1} < 1$ et $\frac{1}{n+1} < 2$, on a

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\left(\frac{1}{n+1}\right) < 2.$$

Il suit que, peu importe la parité de n, l'expression précédente sera toujours strictement inférieure à 2: si n est pair, $(-1)^n = 1$ et c'est alors clair par l'argument ci-dessus, mais si n impair, alors $(-1)^n = -1$ et toute l'expression est négative et donc, *a fortiori*, strictement inférieure à 2.

(c) On a, pour toute valeur de n, $f_n(1) = 2$. Ainsi, 1 est toujours solution de l'équation. D'après les tableaux de variations précédents, le théorème de bijection (f_n étant continue) permet de conclure quant au nombre de racines de l'équation $f_n(x) = 2$. Plus précisément,

- Si n est pair, comme $f_n\left(-\frac{n}{n+1}\right) < 2$, il n'y a qu'un seul antécédent et c'est 1.

- Si n est impair, il y a exactement deux solutions; une dans l'intervalle $]-\infty;-\frac{n}{n+1}[$ et 1.

(2) (a) On commence par chercher les valeurs propres de A :

$$\begin{aligned}
\lambda \text{ valeur propre de } A \quad &\Longleftrightarrow \quad A - \lambda I \text{ non inversible} \\
&\Longleftrightarrow \quad \det(A - \lambda I) = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad (1-\lambda)^2 - 1 = 0
\end{aligned}$$

$$\lambda(2-\lambda) = 0$$

$$\lambda = 0 \text{ ou } \lambda = 2$$

Ainsi

$$\mathrm{Sp}(A) = \{0, 1\}.$$

La matrice A est alors diagonalisable (ce qu'on savait déjà vu qu'elle est symétrique) et on forme une matrice de passage vers une base de vecteurs propres de A en prenant pour colonnes deux vecteurs propres de A associés à des valeurs propres différentes. On doit alors résoudre les équations des sous-espaces propres

$$\begin{aligned}
X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A) \quad &\Longleftrightarrow \quad x + y = 0 \Longleftrightarrow y = -x \\
&\Longleftrightarrow \quad X = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

donc $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

$$\begin{aligned}
X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A - 2I) \quad &\Longleftrightarrow \quad -x + y = 0 \Longleftrightarrow y = x \\
&\Longleftrightarrow \quad X = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

donc $\mathrm{Ker}(A - 2I) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

En posant

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

la formule de changement de base donne alors $A = PDP^{-1}$.

(b) La matrice P est inversible, c'est une matrice de passage. Un pivot de Gauss simultané immédiat donne

$$P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

(3) (a) On a les équivalences suivantes

$$\begin{aligned}
X \text{ solution de } (E_n) \quad &\Longleftrightarrow \quad X^{n+1} + X^n = A \\
&\Longleftrightarrow \quad P^{-1}\left(X^{n+1} + X^n\right)P = P^{-1}AP \\
&\Longleftrightarrow \quad P^{-1}X^{n+1}P^{-1} + PX^nP = D \\
&\Longleftrightarrow \quad \left(P^{-1}XP\right)^{n+1} + \left(P^{-1}XP\right)^n = D \\
&\Longleftrightarrow \quad Y^{n+1} + Y^n = D \\
&\Longleftrightarrow \quad Y \text{ solution de } (E'_n) \text{ et } Y = P^{-1}XP.
\end{aligned}$$

(b) Soit donc Y une solution de (E'_n).

(i) Comme Y est solution de (E'_n), alors D s'exprime comme un polynôme en Y, $D = Y^{n+1} + Y^n$, et comme Y commute avec toute puissance d'elle-même, Y commute avec D.

(ii) Si Y commute avec D, alors $YD = DY$. Le calcul explicite donne

$$YD = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2b \\ 0 & 2d \end{pmatrix}$$

et

$$DY = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2c & 2d \end{pmatrix}.$$

Il suit nécessairement que $b = c = 0$. En particulier, Y est diagonale, et il est facile de calculer ses puissances.

(iii) D'après la question précédentes, on peut calculer $Y^{n+1} + Y^n$:

$$Y^{n+1} + Y^n = \begin{pmatrix} a^{n+1} & 0 \\ 0 & d^{n+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & d^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{n+1} + a^n & 0 \\ 0 & d^{n+1} + d^n \end{pmatrix}.$$

Ainsi, comme Y est solution de (E'_n), on a nécessairement $a^{n+1} + a^n = 0 \iff a^n(a+1) = 0$ et donc $a = 0$ ou $a = -1$.

(iv) Le nombre de solutions de (E_n) est exactement le même que le nombre de solutions de (E'_n). Pour toutes les déterminer, il reste à trouver les valeurs possibles de d qui doit être solution de

$$d^{n+1} + d^n = 2.$$

Le nombre de solutions de cette équation dépend, comme vu en première partie d'exercice, de la parité de n. Ainsi,

- Si n est pair, il y a une seule solution pour d (qui est $d = 1$) et l'équation (E_n) aura donc deux solutions (car il y a deux possibilités pour a).

- Si n est impair, il y a deux solutions pour d. L'équation (E_n) aura donc quatre solutions.

(c) On note α la solution négative de $x^4 + x^3 = 2$. On sait, d'après toute l'étude précédente, que les solutions de (E'_3) sont

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Ainsi, les quatre solutions de (E_3) sont

$$P\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1}, \quad P\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}P^{-1}, \quad P\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1}, \quad \text{et} \quad P\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}P^{-1},$$

soit les matrices

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha/2 & \alpha/2 \\ \alpha/2 & \alpha/2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} (\alpha-1)/2 & (\alpha+1)/2 \\ (\alpha+1)/2 & (\alpha-1)/2 \end{pmatrix}.$$