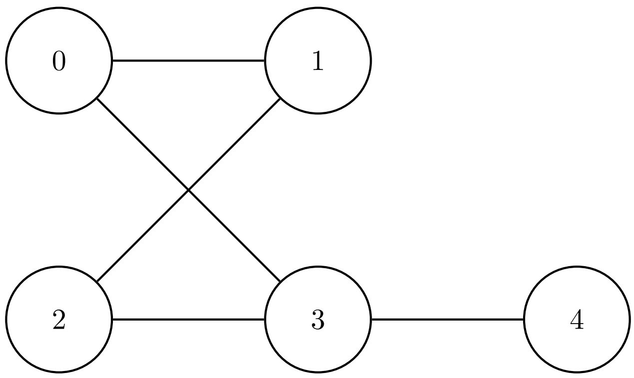
EDHEC 2023

On suppose, et c'est valable pour toute l'épreuve, que les librairies `numpy`, `numpy.random` et `numpy.linalg` de **Python** sont importées avec les commandes respectives `import numpy as np`, `import numpy.random as rd` et `import numpy.linalg as al`.

Exercice 1

On considère le graphe G suivant et on note A la matrice d'adjacence de G.



1. Déterminer la matrice A en expliquant sa construction.

2. a) Par lecture du graphe, donner (en listant leurs sommets) les chaînes de longueur 3 reliant les sommets 2 et 3. Combien y en a-t-il ?

b) On considère la fonction **Python** suivante :

```
def f(M,k):
    N=al.matrix_power(M,k)
    return N
```

On suppose que l'on a saisi la matrice A et on considère les instructions :

```
B=f(A,---)
n=B[---]
print(n)
```

Compléter ces instructions pour qu'elles permettent l'affichage du nombre trouvé à la question ***2.a)***.

On note D la matrice diagonale, appelée matrice des degrés de G, dont l'élément diagonal situé à la ligne i et à la colonne i est le degré du sommet numéro i (ceci étant valable pour tout $i \in [\![1, 5]\!]$).
On définit également la matrice L, appelée matrice laplacienne de G, en posant $L = D - A$.
On note $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$ les valeurs propres non nécessairement distinctes de L et on suppose $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \leqslant \lambda_4 \leqslant \lambda_5$.

3 a) Déterminer la matrice D.

b) Vérifier que l'on a $L = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

c) Pourquoi la matrice L est-elle diagonalisable ?

4 On se propose dans cette question de montrer que les valeurs propres de L sont positives ou nulles et que $\lambda_1 = 0$.

Soit $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) On identifie une matrice de $\mathscr{M}_1(\mathbb{R})$ à un réel. À quel ensemble appartient la quantité ${}^tXLX$?

b) Exprimer ${}^tXLX$ en fonction de a, b, c, d et e puis montrer que l'on a :

$$ {}^tXLX = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-d)^2 + (d-a)^2 + (e-d)^2 $$

c) On suppose que X est un vecteur propre de L associé à une certaine valeur propre λ. Déterminer LX puis ${}^tXLX$ en fonction de λ, a, b, c, d et e. En déduire que les valeurs propres de L sont positives ou nulles.

d) Déterminer LU et en déduire que $\lambda_1 = 0$.

5 a) À l'aide de la question ***3.b)***, montrer l'équivalence :

$$ LX = 0 \iff X \in \mathrm{Vect}\,(U) $$

b) Conclure que λ_2, λ_3, λ_4 et λ_5 sont des réels strictement positifs.

Exercice 2

1. Donner un exemple, d'une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ pour laquelle il existe un réel K élément de $]0,1[$ tel que, pour tout couple (x,y) de réels, on ait :

$$ |f(x) - f(y)| \leqslant K \times |x-y| \qquad (*) $$

Démonstration. Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{2}x$. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$ |f(x) - f(y)| = \left| \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y \right| = \frac{1}{2}\,|x-y| \leqslant \frac{1}{2}\,|x-y| $$

Donc la relation $(*)$ est vérifiée avec $K = \dfrac{1}{2} \in\,]0,1[$. $\square$

Commentaire

L'inégalité $(*)$ fait penser à l'inégalité des accroissements finis. On a donc choisi à la question précédente une fonction très simple qui vérifie : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$. Pour cette fonction linéaire, le calcul est direct et il n'est pas utile de recourir à l'inégalité des accroissements finis.

On considère pour toute la suite une fonction f vérifiant la condition précédente.
On dit que f est K-contractante.

2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a, d'après $(*)$,

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant K \times |x - x_0|$$

Or, $\lim\limits_{x \to x_0} |x - x_0| = 0$ donc, par théorème d'encadrement : $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x) - f(x_0)| = 0$.
Autrement dit,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Ceci prouve que f est continue en x_0. Le réel x_0 étant quelconque, on peut conclure que

$$\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$

□

3. À l'aide de la relation $(*)$, montrer par l'absurde que l'équation $f(x) = x$ admet au plus une solution.

Démonstration. Supposons que l'équation $f(x) = x$ admet au moins deux solutions réelles distinctes, que l'on note a et b. On a alors, d'après $(*)$:

$$|f(a) - f(b)| \leqslant K \times |a - b|$$

i.e.

$$|a - b| \leqslant K \times |a - b|$$

Puisque $a \neq b$, on a $|a - b| > 0$ et donc $1 \leqslant K$. Ceci contredit l'hypothèse faite sur K. Donc

$$\boxed{\text{l'équation } f(x) = x \text{ admet au plus une solution.}}$$

□

4. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la donnée du réel u_0 et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, valable pour tout entier naturel n.

a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a :

$$|u_{n+1} - u_n| \leqslant K^n \times |u_1 - u_0|$$

Démonstration. Montrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$
où $\mathcal{P}(n)$: « $|u_{n+1} - u_n| \leqslant K^n \times |u_1 - u_0|$ »
<u>Initialisation</u> :
$K^0 = 1$ donc on a bien $|u_1 - u_0| \leqslant K^0 \, |u_1 - u_0|$. D'où $\mathcal{P}(0)$.
<u>Hérédité</u> : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$. Montrons $\mathcal{P}(n+1)$. On a alors

$$\begin{aligned} |u_{n+2} - u_{n+1}| &= |f(u_{n+1}) - f(u_n)| \\ &\leqslant K \, |u_{n+1} - u_n| && \textit{d'après } (*) \\ &\leqslant K \times K^n \times |u_1 - u_0| && \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\ &= K^{n+1} \times |u_1 - u_0| \end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.
On a bien montré par récurrence : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - u_n| \leqslant K^n \times |u_1 - u_0|$.

□

b) Établir la convergence de la série de terme général $u_{n+1} - u_n$, puis en déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente. On note a sa limite.

Démonstration. On a

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant |u_{n+1} - u_n| \leqslant K^n \, |u_1 - u_0|$
- la série $\sum K^n$ est une série géométrique de raison $K \in \,]0,1[$ donc converge

Ainsi, par critère de comparaison pour les séries à termes positifs, il vient que la série $\sum |u_{n+1} - u_n|$ est convergente. Autrement dit, la série $\sum u_{n+1} - u_n$ est absolument convergente, ce qui prouve qu'elle converge.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Par télescopage, on a

$$\sum_{n=0}^{N-1} u_{n+1} - u_n = u_N - u_0$$

donc

$$u_N = u_0 + \sum_{n=0}^{N-1} u_{n+1} - u_n$$

Ceci prouve que la suite (u_n) converge (comme somme de deux suites convergentes) et sa limite a vérifie :

$$a = u_0 + \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1} - u_n$$

□

c) Conclure que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution.

Démonstration. On sait déjà que l'équation $f(x) = x$ admet au plus une solution, il suffit donc de montrer qu'elle en admet au moins une. Plus précisément, montrons que $f(a) = a$.

- (u_n) converge vers a donc (u_{n+1}) également (comme suite extraite)
- la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ (cf question ***2***) donc $(f(u_n))$ converge vers $f(a)$
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ donc, par unicité de la limite : $a = f(a)$

□

5. On désigne par n et p des entiers naturels (avec $p \geqslant 1$).

a) Justifier que l'on a : $\displaystyle\sum_{i=n}^{n+p-1} |u_{i+1} - u_i| \leqslant \sum_{i=n}^{n+p-1} K^i \times |u_1 - u_0|$.

Démonstration. Remarquons que n et $n + p - 1$ sont des entiers naturels. D'après la question ***4.a)***, pour tout $i \in [\![n, n+p-1]\!]$, on a

$$|u_{i+1} - u_i| \leqslant K^i \, |u_1 - u_0|$$

En sommant cette inégalité pour i variant de n à $n + p - 1$, on obtient bien

$$\boxed{\sum_{i=n}^{n+p-1} |u_{i+1} - u_i| \leqslant \sum_{i=n}^{n+p-1} K^i \times |u_1 - u_0|.}$$

□

b) En déduire l'inégalité :

$$|u_{n+p} - u_n| \leqslant K^n \times \frac{1 - K^p}{1 - K} \times |u_1 - u_0|$$

Démonstration. Tout d'abord, par télescopage,

$$u_{n+p} - u_n = \sum_{i=n}^{n+p-1} u_{i+1} - u_i$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}
|u_{n+p} - u_n| &= \left| \sum_{i=n}^{n+p-1} u_{i+1} - u_i \right| \\
&\leqslant \sum_{i=n}^{n+p-1} |u_{i+1} - u_i| && \textit{(inégalité triangulaire)} \\
&\leqslant \sum_{i=n}^{n+p-1} K^i \times |u_1 - u_0| && \textit{(d'après } \textbf{5.a)}\textit{)} \\
&\leqslant |u_1 - u_0| \sum_{i=n}^{n+p-1} K^i \\
&\leqslant |u_1 - u_0| \sum_{i=0}^{p-1} K^{n+i} && \textit{(décalage d'indice)} \\
&\leqslant |u_1 - u_0| \, K^n \sum_{i=0}^{p-1} K^i \\
&\leqslant |u_1 - u_0| \, K^n \frac{1 - K^p}{1 - K} && \textit{(somme géométrique de raison } K \neq 1\textit{)}
\end{aligned}$$

□

c) Établir enfin l'inégalité suivante :

$$|a - u_n| \leqslant \frac{K^n}{1 - K} \times |u_1 - u_0|$$

Démonstration. On sait que $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} a$ donc $\lim\limits_{p \to +\infty} u_{p+n} = a$. On en déduit, par continuité de la fonction valeur absolue, que

$$\lim_{p \to +\infty} |u_{n+p} - u_n| = |a - u_n|$$

D'autre part, $\lim\limits_{p \to +\infty} K^p = 0$ (car $0 < K < 1$) et donc

$$\lim_{p \to +\infty} K^n \times \frac{1 - K^p}{1 - K} \times |u_1 - u_0| = \frac{K^n}{1 - K} \times |u_1 - u_0|$$

Finalement, par passage à la limite (lorsque $p \to +\infty$) dans l'inégalité de la question précédente, on obtient

$$\boxed{|a - u_n| \leqslant \frac{K^n}{1 - K} \times |u_1 - u_0|.}$$

□

6. Étude d'un exemple : on considère la fonction f définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \; f(t) = \frac{1}{1 + \mathrm{e}^t}$$

a) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ puis calculer $f'(t)$ et $f''(t)$, pour tout réel t.

Démonstration. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ comme inverse de la fonction $g : t \mapsto 1 + \mathrm{e}^t$ qui est elle-même de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ (en effet, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^t > 0$ donc $1 + \mathrm{e}^t > 0$).
Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$f'(t) = -\frac{\mathrm{e}^t}{(1+\mathrm{e}^t)^2}$$

et

$$\begin{aligned} f''(t) &= -\frac{\mathrm{e}^t(1+\mathrm{e}^t)^2 - 2\mathrm{e}^t\mathrm{e}^t(1+\mathrm{e}^t)}{(1+\mathrm{e}^t)^4} \\ &= -\mathrm{e}^t(1+\mathrm{e}^t)\frac{1+\mathrm{e}^t-2\mathrm{e}^t}{(1+\mathrm{e}^t)^4} \\ &= -\mathrm{e}^t\frac{1-\mathrm{e}^t}{(1+\mathrm{e}^t)^3} \\ &= \mathrm{e}^t\frac{\mathrm{e}^t-1}{(1+\mathrm{e}^t)^3} \end{aligned}$$

□

b) Déterminer les variations de f' sur $\mathbb{R}$ et établir enfin l'inégalité :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \left|f'(t)\right| \leqslant \frac{1}{4}$$

Démonstration. Soit $t \in \mathbb{R}$. On sait que $\mathrm{e}^t > 0$ et $(1+\mathrm{e}^t)^3 > 0$ donc

- $f''(t) > 0 \iff \mathrm{e}^t - 1 > 0 \iff \mathrm{e}^t > 1 \iff t > 0$ (par stricte croissance de ln sur $]0, 1[$)
- $f''(t) = 0 \iff t = 0$

D'où le tableau de variations :

t	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $f''(t)$		$-$	0	$+$	
Variations de f'	0	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	0

D'après ce tableau de variations, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$-\frac{1}{4} \leqslant f'(t) \leqslant 0 \leqslant \frac{1}{4}$$

et donc

$$\boxed{|f'(t)| \leqslant \tfrac{1}{4}.}$$

□

c) En déduire que f est $\dfrac{1}{4}$-contractante.

Démonstration. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et f' vérifie : $\forall t \in \mathbb{R},\ |f'(t)| \leqslant \frac{1}{4}$. D'après l'inégalité des accroissements finis : pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \frac{1}{4}\,|x - y|$$

ce qui prouve bien que

$$\boxed{f \text{ est } \frac{1}{4}\text{-contractante.}}$$

□

d) On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de $u_0 = 0$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, valable pour tout entier naturel n. Montrer que cette suite est convergente. On note toujours a sa limite.

Démonstration. La fonction f est $\dfrac{1}{4}$-contractante d'après la question précédente donc on peut appliquer la question ***4.b)***. Il vient alors que la suite (u_n) est convergente. □

e) Compléter la fonction **Python** ci-dessous afin qu'elle renvoie, pour une valeur donnée de n, la valeur de u_n à l'appel de `suite(n)` :

```
def suite(n):
    u = ------
    for k in range(1, n+1):
        u = -----
    return u
```

Démonstration. La complétion de la fonction s'effectue de la manière suivante :

```
def suite(n):
    u = 0
    for k in range(1, n+1):
        u = 1 / (1 + np.exp(u))
    return u
```

□

f) En s'appuyant sur le résultat de la question ***5.c)***, établir que u_n est une valeur approchée de a à moins de 10^{-3} près dès que n vérifie $4^n \geqslant 2000/3$.

Démonstration. D'après la question ***5.c)***, pour tout entier naturel n,

$$|a - u_n| \leqslant \frac{K^n}{1-K} \times |u_1 - u_0|$$

où $K = \dfrac{1}{4}$, $u_0 = 0$ et $u_1 = f(0) = \dfrac{1}{2}$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|a - u_n| \leqslant \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \frac{1}{4}} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4^n}\frac{2}{3}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\frac{1}{4^n}\frac{2}{3} \leqslant 10^{-3} \iff \frac{2 \times 10^3}{3} \leqslant 4^n \iff \frac{2000}{3} \leqslant 4^n$$

Ainsi, dès que $\dfrac{2000}{3} \leqslant 4^n$, on a $\dfrac{1}{4^n}\dfrac{2}{3} \leqslant 10^{-3}$ et donc $|a - u_n| \leqslant 10^{-3}$, ce qui veut dire que u_n est une valeur approchée de a à 10^{-3} près. □

g) En déduire un programme **Python**, utilisant la fonction précédente, qui calcule et affiche la valeur approchée de a qui en résulte.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} 4^n \geqslant \frac{2000}{3} &\iff n\ln(4) \geqslant \ln\left(\frac{2000}{3}\right) \\ &\iff n \geqslant \frac{\ln\left(\frac{2000}{3}\right)}{\ln(4)} \\ &\iff n \geqslant \left\lceil \frac{\ln\left(\frac{2000}{3}\right)}{\ln(4)} \right\rceil \end{aligned}$$

Nous proposons alors le programme suivant :

```
import numpy as np
x = np.log(2000 / 3) / np.log(4)
n = int(np.ceil(x))
print('Une valeur approchée à 10**(-3) près de a est :', suite(n))
```

□

Commentaire

Cet exercice a pu surprendre. En effet, il est bien plus général et abstrait que la majorité des exercices sur les fonctions et les suites proposés à l'EDHEC ces dernières années. Il ne fallait pas se décourager pour autant et reconnaître des méthodes habituelles utilisées dans des cas où f est connue explicitement (application habituelle de l'inégalité des accroissements finis). On a démontré dans les questions *2* à *4* un théorème de point fixe pour les fonctions réelles contractantes.

Exercice 3

On considère deux réels a et b ainsi que la matrice $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$.

1. a) Montrer que si $a = b$, alors A ne possède qu'une seule valeur propre.

Démonstration. Dans cette question :

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

La matrice A est triangulaire supérieure donc ses valeurs propres sont exactement ses coefficients diagonaux. Ainsi, la matrice A ne possède qu'une seule valeur propre, qui est a.

$$\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \{a\}.}$$

□

b) En déduire par l'absurde que, si $a = b$, la matrice A n'est pas diagonalisable.

Démonstration. On suppose que $a = b$ et que la matrice A est diagonalisable. D'après la question précédente, $\mathrm{Sp}(A) = \{a\}$. Puisque A est diagonalisable, il existe une matrice $P \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ inversible et une matrice $D \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ diagonale telles que :

$$\begin{aligned} A &= PDP^{-1} \\ &= P(aI)P^{-1} && \textit{(puisque } \mathrm{Sp}(D) = \mathrm{Sp}(A) = \{a\}\textit{)} \\ &= aPP^{-1} \\ &= aI \end{aligned}$$

Or, $A \neq aI$, donc c'est absurde.

$$\boxed{\text{la matrice } A \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

□

2. On suppose dans cette question que $a \neq b$.

a) Quelles sont les valeurs propres de A ?

Démonstration. La matrice A est triangulaire supérieure donc ses valeurs propres sont exactement ses coefficients diagonaux (qui sont distincts). Ainsi,

$$\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \{a, b\}.}$$

□

b) Calculer $A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $A\begin{pmatrix}1\\b-a\end{pmatrix}$. Qu'en déduire concernant les vecteurs $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\b-a\end{pmatrix}$?

Démonstration.

$$A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

et $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \neq 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})}$ donc

$$\boxed{\text{le vecteur } \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \text{ est un vecteur propre de } A \text{ pour la valeur propre } a.}$$

$$A\begin{pmatrix}1\\b-a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b\\b(b-a)\end{pmatrix} = b\begin{pmatrix}1\\b-a\end{pmatrix}$$

et $\begin{pmatrix}1\\b-a\end{pmatrix} \neq 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})}$ donc

$$\boxed{\text{le vecteur } \begin{pmatrix}1\\b-a\end{pmatrix} \text{ est un vecteur propre de } A \text{ pour la valeur propre } b.}$$

□

c) Montrer que la famille $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\b-a\end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ puis écrire la matrice P de passage de la base canonique de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ à la base $\mathcal{B}$.

Démonstration. La famille $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\b-a\end{pmatrix}\right)$:

- est libre car constituée de deux vecteurs non colinéaires (car $b - a \neq 0$)

- vérifie : $\mathrm{Card}(\mathcal{B}) = 2 = \dim(\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}))$

donc

$$\boxed{\mathcal{B} \text{ est une base de } \dim(\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})).}$$

De plus, par définition de la matrice de passage :

$$\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & b-a \end{pmatrix}}$$

□

d) Déterminer une matrice diagonale D telle que $AP = PD$, puis conclure que A est diagonalisable.

Démonstration. On pose $D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$. On a

$$AP = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & b-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & b(b-a) \end{pmatrix}$$

et

$$PD = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & b-a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & b(b-a) \end{pmatrix}$$

On a bien

$$\boxed{AP = PD}$$

ce qui se réécrit : $A = PDP^{-1}$. Ainsi, on a prouvé que A est semblable à une matrice diagonale, et donc

$$\boxed{A \text{ est diagonalisable.}}$$

□

3. On considère deux variables aléatoires, X et Y, indépendantes et suivant la même loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$.

a) Établir l'égalité :

$$\mathbb{P}([X = Y]) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = n])\mathbb{P}([Y = n])$$

Démonstration. On applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements associé à X (*i.e.* la famille $([X = n])_{n\in\mathbb{N}^*}$) :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X = Y]) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = n] \cap [X = Y]) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = n] \cap [Y = n]) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = n])\mathbb{P}([Y = n]) \qquad \textit{(par indépendance de } X \textit{ et } Y\textit{)} \end{aligned}$$

□

b) En déduire explicitement $\mathbb{P}([X = Y])$.

Démonstration. On reprend le calcul précédent :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X=Y]) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X=n])\mathbb{P}([Y=n]) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\
&= \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \\
&= \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{n} \\
&= \frac{1}{4}\frac{1}{1-\frac{1}{4}} && \textit{(somme géométrique avec } \left|\frac{1}{4}\right| < 1\textit{)} \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}([X=Y]) = \frac{1}{3}}$$

□

4. a) Soit $A(X,Y)$ la matrice aléatoire définie par $A(X,Y) = \begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$. Déterminer la probabilité p pour que $A(X,Y)$ ne soit pas diagonalisable.

Démonstration. On a vu aux questions ***1.*** et ***2.*** que la matrice $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable si et seulement si $a = b$. On en déduit que la matrice aléatoire $A(X,Y)$ n'est pas diagonalisable si et seulement si l'événement $[X = Y]$ est réalisé. D'où :

$$\boxed{p = \mathbb{P}([X=Y]) = \frac{1}{3}.}$$

□

b) On considère le script **Python** suivant :

```
m=int(input('entrez une valeur entière pour m :'))
c=0
for k in range(m):
    X=rd.geometric(1/2)
    Y=rd.geometric(1/2)
    if X==Y:
        c=c+1
i = 1-c/m
print(i)
```

Pour de grandes valeurs de l'entier naturel m, de quel réel le contenu de la variable i est-il proche ?

Démonstration. D'après la loi faible des grands nombres, pour de grandes valeurs de l'entier naturel m, le réel c/m est proche de $p = \mathbb{P}([X = Y])$ (puisque c'est la fréquence empirique de réalisation de l'événement $[X = Y]$). Ainsi,

$$\boxed{\text{le réel } i \text{ est proche de } 1 - p = \frac{2}{3}.}$$

□

Problème

Partie 1 : propriété d'une loi de probabilité

On désigne par c un réel strictement positif et on considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{c}{x^{1+c}} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

1. Montrer que f peut être considérée comme une densité.

Démonstration. • Soit $x \in \mathbb{R}$.
Si $x < 1$, alors $f(x) = 0$.
Si $x \geqslant 1$, alors $f(x) = \dfrac{c}{x^{1+c}} \geqslant 0$ car $c > 0$.

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant 0.}$$

• La fonction f est :

× continue sur $]-\infty, 1[$ car constante sur cet intervalle ouvert,

× continue sur $]1, +\infty[$ car coïncide avec $x \mapsto \dfrac{c}{x^{1+c}}$ qui est continue sur cet intervalle ouvert.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est continue sur } \mathbb{R} \text{ sauf éventuellement en } 1.}$$

• Tout d'abord,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt &= \int_{1}^{+\infty} f(t)\, dt && \textit{(car } f \textit{ est nulle en dehors de } [1, +\infty[\textit{)} \\ &= \int_{1}^{+\infty} \frac{c}{t^{1+c}}\, dt \end{aligned}$$

La fonction $t \mapsto \dfrac{c}{t^{1+c}}$ est continue sur $[1, +\infty[$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{c}{t^{1+c}}\, dt$ est impropre en $+\infty$. Soit $B \geqslant 1$.

$$\begin{aligned} \int_{1}^{B} \frac{c}{t^{1+c}}\, dt &= c \int_{1}^{B} t^{-1-c}\, dt \\ &= c \left[\frac{t^{-c}}{-c} \right]_{1}^{B} && \textit{car } c > 0 \\ &= 1 - \frac{1}{B^c} \end{aligned}$$

Or, $\displaystyle\lim_{B \to +\infty} 1 - \frac{1}{B^c} = 1$ (car $c > 0$) donc

$$\boxed{\text{l'intégrale } \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt \text{ converge et vaut } 1.}$$

Ainsi,

$$\boxed{f \text{ peut être considérée comme une densité de probabilité.}}$$

□

On considère dans la suite une variable aléatoire X de densité f et on note F sa fonction de répartition. On dit que X suit la loi de Pareto de paramètre c.

2. Déterminer, pour tout réel x, l'expression de $F(x)$ en fonction de x et c.

Démonstration. Tout d'abord, la fonction f étant nulle en dehors de $[1, +\infty[$, on peut considérer que $X(\Omega) = [1, +\infty[$.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Si $x < 1$, alors $[X \leqslant x] = \varnothing$ et donc $F(x) = 0$.
- Si $x \geqslant 1$, alors

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt \\ &= \int_{1}^{x} f(t)\ dt && \textit{(car f est nulle en dehors de $[1,+\infty[$)} \\ &= \int_{1}^{x} \frac{c}{t^{1+c}}\ dt \\ &= 1 - \frac{1}{x^c} && \textit{(d'après le calcul effectué à la question précédente)} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{F : x \mapsto \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{x^c} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}}$$

□

3. Soit t un réel strictement supérieur à 1.

a) Déterminer, en distinguant les cas $x \geqslant 1$ et $x < 1$, la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{[X>t]}([X \leqslant tx])$.

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$. Tout d'abord, remarquons que $\mathbb{P}([X > t]) > 0$ car $X(\Omega) = [1, +\infty[$.
Plus précisément :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X > t]) &= 1 - \mathbb{P}([X \leqslant t]) \\ &= 1 - F(t) \\ &= 1 - \left(1 - \frac{1}{t^c}\right) && \textit{(car $t > 1$)} \\ &= \frac{1}{t^c} \end{aligned}$$

- Premier cas : $x < 1$. Alors $tx < t$ (car $t > 1 \geqslant 0$) d'où

$$[X > t] \cap [X \leqslant tx] = \varnothing$$

et donc

$$\mathbb{P}_{[X>t]}([X \leqslant tx]) = 0$$

- Deuxième cas : $x \geqslant 1$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{[X>t]}([X \leqslant tx]) &= \frac{\mathbb{P}([X > t] \cap [X \leqslant tx])}{\mathbb{P}([X > t])} \\
&= \frac{\mathbb{P}([t < X \leqslant tx])}{\frac{1}{t^c}} \\
&= t^c \left(F(tx) - F(t)\right) && \textit{(car } x \geqslant 1 \textit{ et } t > 0 \textit{ donc } tx \geqslant t\textit{)} \\
&= t^c \left(\left(1 - \frac{1}{(tx)^c}\right) - \left(1 - \frac{1}{t^c}\right) \right) \\
&= t^c \left(\frac{1}{t^c} - \frac{1}{(tx)^c} \right) \\
&= 1 - \frac{1}{x^c}
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\boxed{\mathbb{P}_{[X>t]}([X \leqslant tx]) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{x^c} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}}$$

□

b) En déduire que la loi de $\dfrac{X}{t}$, conditionnellement à l'événement $[X > t]$, est la loi de X.

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{[X>t]}\left(\left[\frac{X}{t} \leqslant x \right] \right) &= \mathbb{P}_{[X>t]}([X \leqslant tx]) && \textit{(car } t > 0\textit{)} \\
&= F(x) && \textit{(d'après les questions } \textbf{\textit{2}} \textit{ et } \textbf{\textit{3.a)}}\textit{)}
\end{aligned}$$

La fonction de répartition caractérisant la loi, on en déduit que

$$\boxed{\text{la loi de } \frac{X}{t}, \text{ conditionnellement à l'événement } [X > t], \text{ est la loi de } X.}$$

□

Partie 2 : réciproque de la propriété précédente

On considère une variable aléatoire Y de densité g nulle sur $]-\infty, 1[$, strictement positive et continue sur $[1, +\infty[$. On pose $c = g(1)$ et on note G la fonction de répartition de Y.
Dans toute la suite, on suppose que, pour tout réel t strictement supérieur à 1, on a :

- $\mathbb{P}([Y > t]) > 0$.
- La loi de $\dfrac{Y}{t}$, conditionnellement à l'événement $[Y > t]$, est la loi de Y.

Commentaire

Remarquons tout d'abord une légère imprécision dans l'énoncé. Il est annoncé que nous allons démontrer la réciproque de la propriété précédente. Nous allons donc démontrer que Y suit une loi de Pareto de paramètre c. Or, nous faisons l'hypothèse que g admet une densité continue sur $[1, +\infty[$, et donc a fortiori continue en 1, alors que la densité f fixée en début d'énoncé n'est clairement pas continue en 1. C'est la restriction de f à l'intervalle $[1, +\infty[$ qui est continue sur $[1, +\infty[$, et non pas f ! Il est en réalité impossible de construire une densité continue en 1 pour la loi de Pareto. Il aurait donc fallu ici plutôt supposer que la restriction de g à $[1, +\infty[$ est continue sur $[1, +\infty[$.

4. Justifier que $G(1) = 0$.

Démonstration. La densité g étant nulle sur $]-\infty, 1[$ et strictement positive sur $[1, +\infty[$, on peut considérer que $Y(\Omega) = [1, +\infty[$. Il suit que

$$\boxed{G(1) = \mathbb{P}([Y \leqslant 1]) = \mathbb{P}([Y = 1]) = 0 \text{ (car } Y \text{ est à densité)}}$$

□

5. *a)* Établir l'égalité :

$$\forall x \geqslant 1,\ \forall t > 1,\ G(x) = \frac{G(tx) - G(t)}{1 - G(t)}$$

Démonstration. Soit $x \geqslant 1$. Soit $t > 1$. On sait que la loi de $\dfrac{Y}{t}$, conditionnellement à l'événement $[Y > t]$, est la loi de Y. Ceci se traduit par

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([Y \leqslant x]) &= \mathbb{P}_{[Y>t]}\left(\left[\frac{Y}{t} \leqslant x\right]\right) \\
&= \mathbb{P}_{[Y>t]}([Y \leqslant tx]) && \textit{(car } t > 0\textit{)} \\
&= \frac{\mathbb{P}([Y > t] \cap [Y \leqslant tx])}{\mathbb{P}([Y > t])} \\
&= \frac{\mathbb{P}([t < Y \leqslant tx])}{1 - \mathbb{P}([Y \leqslant t])}
\end{aligned}$$

ce qui donne bien :

$$\boxed{G(x) = \frac{G(tx) - G(t)}{1 - G(t)}}$$

□

b) Justifier que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$ et en déduire que :

$$\forall x > 1,\ \forall t > 1,\ G'(x) = \frac{tG'(tx)}{1 - G(t)}$$

Démonstration. La densité g est continue sur $]1, +\infty[$ donc G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$. Soit $t > 1$. Par composition, la fonction $h : x \mapsto G(tx)$ est également de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$ et vérifie :

$$\forall x > 1, h'(x) = tG'(tx)$$

Soit $x > 1$. D'après la question précédente, on sait que

$$G(x) = \frac{G(tx) - G(t)}{1 - G(t)}$$

En dérivant cette égalité par rapport à x (remarquons que $G(t)$ et $1 - G(t)$ sont des constantes), on obtient bien :

$$\boxed{G'(x) = \frac{tG'(tx)}{1 - G(t)}}$$

□

c) Montrer enfin la relation :

$$\forall t > 1,\ G(t) + \frac{t}{c} G'(t) = 1$$

Démonstration. Soient $t > 1$ et $x > 1$. On peut réécrire la relation précédente sous la forme :

$$g(x) = \frac{tG'(tx)}{1 - G(t)} \quad (*)$$

(en effet, $G' = g$ sur $]1, +\infty[$ par continuité de g)

- la fonction g est continue sur $[1, +\infty[$ donc $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = g(1) = c$
- la fonction G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$ donc G' est continue en t et donc $\lim\limits_{x \to 1} G'(tx) = G'(t)$

On peut donc faire un passage à la limite dans la relation $(*)$ lorsque $x \to 1$:

$$c = \frac{tG'(t)}{1 - G(t)}$$

d'où

$$1 - G(t) = \frac{t}{c} G'(t)$$

et finalement

$$\boxed{G(t) + \frac{t}{c} G'(t) = 1}$$

□

6. Dans cette question, la lettre y désigne une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$ qui, à tout réel t de $]1, +\infty[$, associe $y(t)$.
On note (E_1) l'équation différentielle $y + \frac{t}{c} y' = 0$ et (E_2) l'équation différentielle $y + \frac{t}{c} y' = 1$.

Il convient de noter que ces équations différentielles ne sont pas à coefficients constants.

a) Soit z la fonction définie par $z(t) = t^c y(t)$. Montrer que y est solution de l'équation différentielle (E_1) si, et seulement si, z est constante sur $]1, +\infty[$.

Démonstration. La fonction y est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$ donc la fonction z est dérivable sur $]1, +\infty[$. On en déduit que

$$z \text{ est constante sur }]1, +\infty[\iff \forall t > 1, z'(t) = 0$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} z \text{ est constante sur }]1,+\infty[&\iff \forall t > 1, ct^{c-1}y(t) + t^c y'(t) = 0 \\ &\iff \forall t > 1, cy(t) + ty'(t) = 0 \qquad \textit{(car } t^{c-1} = e^{(c-1)\ln(t)} \neq 0\textit{)} \\ &\iff \forall t > 1, y(t) + \frac{t}{c} y'(t) = 0 \qquad \textit{(car } c = g(1) > 0\textit{)} \\ &\iff y \text{ est solution de l'équation différentielle } (E_1) \end{aligned}$$

□

b) En notant K la constante évoquée à la question ***6.a)***, donner toutes les solutions de (E_1).

Démonstration. D'après la question précédente, les solutions de (E_1) sont de la forme :

$$y : t \mapsto \frac{K}{t^c}, \qquad \text{où } K \in \mathbb{R}$$

□

c) Trouver une fonction u, constante sur $]1,+\infty[$, et solution de l'équation différentielle (E_2).

Démonstration. La fonction $u : t \mapsto 1$ est constante sur $]1,+\infty[$ donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1,+\infty[$ et vérifie :

$$\forall t > 1, u(t) + \frac{t}{c} u'(t) = u(t) = 1$$

donc

$$\boxed{\text{la fonction constante } u : t \mapsto 1 \text{ est solution de l'équation différentielle } (E_2).}$$

□

d) Montrer l'équivalence : h solution de $(E_2) \iff h - u$ solution de (E_1).

Démonstration.

$$\begin{aligned} h \text{ solution de } (E_2) &\iff h + \frac{t}{c} h' = 1 \\ &\iff (h-1) + \frac{t}{c}(h-1)' = 0 \qquad \textit{(car } (h-1)' = h'\textit{)} \\ &\iff (h-u) + \frac{t}{c}(h-u)' = 0 \\ &\iff h - u \text{ solution de } (E_1) \end{aligned}$$

□

e) En déduire que les solutions de l'équation différentielle (E_2) sont les fonctions h définies par :

$$\forall t > 1, \; h(t) = 1 + \frac{K}{t^c}$$

Démonstration. On reprend l'équivalence précédente :

$$\begin{aligned} h \text{ solution de } (E_2) &\iff h - u \text{ solution de } (E_1) \\ &\iff \exists K \in \mathbb{R}, \forall t > 1, (h-u)(t) = \frac{K}{t^c} \qquad \textit{(cf question } \textbf{\textit{6.b)}}\textit{)} \\ &\iff \exists K \in \mathbb{R}, \forall t > 1, h(t) = 1 + \frac{K}{t^c} \qquad \textit{(car } u(t) = 1\textit{)} \end{aligned}$$

□

7. a) Montrer finalement que l'on a :

$$\forall t > 1,\ G(t) = 1 - \frac{1}{t^c}$$

Démonstration. On sait que G est une solution de l'équation (E_2) d'après la question ***5.c)***. Ainsi, il existe une constante $K \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall t > 1, G(t) = 1 + \frac{K}{t^c}$$

De plus, $G(1) = 0$ et on sait que toute fonction de répartition est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$. Ainsi, en faisant tendre t vers 1, on obtient :

$$0 = 1 + K$$

d'où

$$K = -1$$

Finalement, on a bien

$$\boxed{\forall t > 1,\ G(t) = 1 - \frac{1}{t^c}.}$$

□

b) Vérifier que cette relation s'étend à $[1, +\infty[$ puis conclure quant à la loi de Y.

Démonstration. D'une part, $G(1) = 0$.
D'autre part, $1 - \frac{1}{1^c} = 1 - 1 = 0$.
On en déduit que la relation de la question précédente est toujours valable en $t = 1$.
Par croissance de G, on a également, pour tout $t < 1$, $G(t) = 0$.
D'où, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $G(t) = F(t)$ (fonction de répartition de X qui suit la loi de Pareto de paramètre c).

La fonction de répartition caractérise la loi donc Y suit la loi de Pareto de paramètre c.

□

Partie 3 : simulation d'une variable suivant la loi de Pareto de paramètre c

8. On pose $Z = \ln(X)$ et on admet que Z est une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé que X. On note H sa fonction de répartition.

a) Pour tout réel x, exprimer $H(x)$ à l'aide de la fonction F.

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} H(x) &= \mathbb{P}([Z \leqslant x]) \\ &= \mathbb{P}([\ln(X) \leqslant x]) \\ &= \mathbb{P}([X \leqslant \mathrm{e}^x]) && \textit{(par stricte croissance de } \exp \textit{ sur } \mathbb{R}\textit{)} \\ &= F(\mathrm{e}^x) \end{aligned}$$

$$\boxed{H(x) = F(\mathrm{e}^x)}$$

□

b) En déduire que Z suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

Démonstration. Tout d'abord,

$$\begin{aligned} Z(\Omega) &= \ln(X)(\Omega) \\ &= \ln\left(X(\Omega)\right) \\ &= \ln\left([1, +\infty[\right) \\ &= [0, +\infty[\end{aligned}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Premier cas : $x < 0$.
  Alors $H(x) = \mathbb{P}([Z \leqslant x]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$.
- Deuxième cas : $x \geqslant 0$.
  Alors

$$\begin{aligned} H(x) &= F\left(\mathrm{e}^x\right) \\ &= 1 - \frac{1}{\left(\mathrm{e}^x\right)^c} && \textit{(car } \mathrm{e}^x \geqslant 1\textit{)} \\ &= 1 - \mathrm{e}^{-cx} \end{aligned}$$

D'où

$$H : x \mapsto \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-cx} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

On reconnait la fonction de répartition d'une v.a.r. suivant la loi exponentielle de paramètre c.

$$\boxed{\text{La fonction de répartition caractérise la loi donc } Z \text{ suit la loi exponentielle de paramètre } c.}$$

□

c) Écrire une fonction **Python** d'en-tête `def simulX(c)` et permettant de simuler X.

Démonstration. On simule une v.a.r. $Z \hookrightarrow \mathcal{E}(c)$ puis on la transforme pour obtenir une simulation de $X = \mathrm{e}^Z$.

```
def simulX(c):
    Z = rd.exponential(1/c)
    X = np.exp(Z)
    return X
```

□