EML 2023

EXERCICE 1

Pour $x \in]0,+\infty[$ on pose : $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x}$.
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, valable pour tout entier naturel n.

1. a) Étudier les variations de la fonction $f : x \mapsto f(x)$ (on dressera son tableau de variations, en précisant les limites).

Démonstration. La fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que quotient de deux fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$, dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0,+\infty[$.
Soit $x \in]0,+\infty[$.

$$f'(x) = \frac{-\mathrm{e}^{-x}x - \mathrm{e}^{-x}}{x^2} = -\mathrm{e}^{-x}\frac{x+1}{x^2}$$

$x > 0$ donc $x+1 > 0$ et $x^2 > 0$. On a également $\mathrm{e}^{-x} > 0$ donc $f'(x) < 0$.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est strictement décroissante sur }]0,+\infty[.}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc, par produit,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0}$$

$\lim\limits_{x\to0^+} \mathrm{e}^{-x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ donc, par produit,

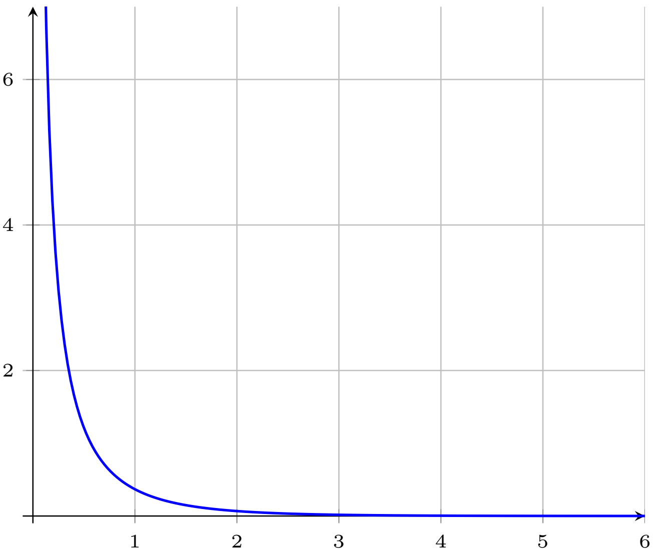
$$\boxed{\lim_{x\to0^+} f(x) = +\infty}$$

On en déduit le tableau de variations suivant :

x	0	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	‖	$-$
Variations de f	‖	$+\infty \searrow 0$

Commentaire

Le graphe de f n'était pas demandé, mais cela aurait pu faire l'objet d'une question. On le donne quand même ci-dessous.



$\square$

b) Vérifier que chaque terme de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est correctement défini et strictement positif.

Démonstration. Montrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$
où $\mathcal{P}(n)$: « u_n est correctement défini et $u_n > 0$ »
<u>Initialisation :</u>
$u_0 = 1$ est bien défini et $1 > 0$. D'où $\mathcal{P}(0)$.
<u>Hérédité :</u> soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et montrons $\mathcal{P}(n+1)$.
Par hypothèse de récurrence, u_n est bien défini et $u_n > 0$ donc $u_{n+1} = f(u_n)$ est bien défini car f est définie sur $]0, +\infty[$. De plus, $\mathrm{e}^{-u_n} > 0$ et $u_n > 0$ donc $u_{n+1} = \frac{\mathrm{e}^{-u_n}}{u_n} > 0$. D'où $\mathcal{P}(n+1)$.
D'où le résultat par récurrence. $\square$

2. *Informatique.*

a) Recopier et compléter la fonction **Python** suivante afin que l'appel `fonc_1(a)` renvoie le plus petit entier n tel que $u_n > a$.

```
def fonc_1(a):
    from numpy import exp
    u=1
    n=0
    while ...... :
        u = exp(-u)/u
        n=....
    return n
```

Démonstration. Il s'agit d'un algorithme classique de recherche du plus petit entier n vérifiant une condition donnée. Il faut écrire la négation de la condition dans la boucle `while` et incrémenter n tant que cette négation est vérifiée.

```python
def fonc_1(a):
    from numpy import exp
    u=1
    n=0
    while u <= a:
        u = exp(-u)/u
        n=n+1
    return n
```

□

b) On considère maintenant la fonction **Python** :

```python
def fonc_2(a):
    from numpy import exp
    u=1
    n=0
    while u>a :
        u = exp(-u)/u
        n=n+1
    return n
```

Les appel `fonc_1(10**6)` et `fonc_2(10**(-6))` donnent respectivement 6 et 5.
Qu'en déduire pour u_5 et u_6 ?
Commenter ce résultat en une ligne.

Commentaire

L'énoncé comportait ici une grosse coquille, qui changeait complètement la fonction. Il était écrit dans la version initiale

```python
    while u<a :
```

ce qui revenait quasiment à faire le même programme qu'à la question précédente. Pour réussir à corriger l'énoncé, il fallait comprendre que l'on voulait ici trouver le plus petit entier n tel que $u_n \leqslant a$. Cela se comprend en regardant/devinant la fin de l'exercice : la sous-suite (u_{2n+1}) converge vers 0. De plus, c'est cohérent avec l'appel `fonc_2(10**(-6))` qui se fait avec une valeur de `a` très proche de 0.

Démonstration. On en déduit que $u_6 > 10^6$ et $u_5 \leqslant 10^{-6}$. On conjecture alors que

$$\boxed{u_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \text{ et } u_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$$

□

c) Écrire une fonction **Python** qui a pour argument un entier n et qui renvoie la valeur de u_n.

Démonstration.

```
def fonc_2(a):
    from numpy import exp
    u=1
    k in range(n):
        u = exp(-u)/u
    return u
```

□

3. Pour $x \in [0, +\infty[$ on pose $g(x) = \mathrm{e}^{-x} - x^2$.

a) Démontrer que la fonction $g : x \mapsto g(x)$ réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $]-\infty, 1]$.

Démonstration. La fonction g est dérivable sur $[0, +\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $[0, +\infty[$. Soit $x \in [0, +\infty[$.

$$g'(x) = -\mathrm{e}^{-x} - 2x < 0$$

Ainsi,

- g est continue sur $[0, +\infty[$ (car dérivable sur $[0, +\infty[$)
- g est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$

On en déduit que g réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $g([0, +\infty[)$. Or,

$$g([0, +\infty[) =]\lim_{x \to +\infty} g(x), g(0)] =]-\infty, 1]$$

d'où le résultat. □

b) En déduire que l'équation $f(x) = x$, d'inconnue x, possède une unique solution dans l'intervalle $]0, +\infty[$, que l'on notera α.

Démonstration. Soit $x \in]0, +\infty[$.

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x} = x \\ &\iff \mathrm{e}^{-x} = x^2 \\ &\iff g(x) = 0 \end{aligned}$$

Ainsi, les solutions de l'équation $f(x) = x$ sont exactement les solutions de l'équation $g(x) = 0$. Or, $0 \in]-\infty, 1]$ donc 0 admet un unique antécédent par g dans $[0, +\infty[$, que l'on note α. Puisque $g(0) = 1$, on en déduit que $\alpha \neq 0$. D'où

$$\boxed{\alpha \in]0, +\infty[.}$$

□

c) Justifier que $\dfrac{1}{\mathrm{e}} < \alpha < 1$. *On rappelle que* $e \simeq 2,7$.

Démonstration.

- Méthode 1 : classiquement, on doit comparer $g\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$, $g(\alpha)$ et $g(1)$ puis conclure par stricte monotonie.
  Tout d'abord : $g(\alpha) = 0$ par définition.
  Ensuite $g(1) = \mathrm{e}^{-1} - 1^2 = \frac{1}{\mathrm{e}} - 1 = \frac{1-\mathrm{e}}{\mathrm{e}} < 0$.
  Enfin, $g\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{\mathrm{e}}} - \left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)^2 = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\frac{1}{e}}} - \dfrac{1}{\mathrm{e}^2} = \dfrac{\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^{\frac{1}{e}}}{\mathrm{e}^{\frac{1}{e}}\mathrm{e}^2} > 0$ car $2 > \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.
  D'où
  $$g\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right) > g(\alpha) > g(1)$$
  et par stricte décroissance de g sur $[0, +\infty[$, on en déduit que
  $$\boxed{\frac{1}{\mathrm{e}} < \alpha < 1}$$
- Méthode 2 : on pouvait s'épargner quelques calculs en remarquant que $\dfrac{1}{\mathrm{e}} = f(1)$
  On commence comme précédemment par démontrer que $\alpha < 1$ en comparant $g(\alpha)$ et $g(1)$.
  Par stricte décroissance de f sur $]0, +\infty[$, on en déduit que $f(\alpha) > f(1)$. Or, $f(\alpha) = \alpha$ et $f(1) = \dfrac{\mathrm{e}^{-1}}{1} = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

□

4. a) Démontrer que l'on a : $u_2 > u_0$.

Démonstration. $u_0 = 1$ donc $u_1 = f(1) = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ donc

$$u_2 = f\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right) = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{\mathrm{e}}}}{\frac{1}{\mathrm{e}}} = \mathrm{e}\mathrm{e}^{-\frac{1}{\mathrm{e}}} = \mathrm{e}^{1-\frac{1}{\mathrm{e}}} = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}}}$$

Or, la fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $\frac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}} > 0$, donc $u_2 > \mathrm{e}^0 = 1 = u_0$. □

b) En déduire que la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Démonstration. Montrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$
où $\mathcal{P}(n)$: « $u_{2n+2} \geqslant u_{2n}$ »
Initialisation :
$u_2 > u_0$ d'après la question précédente. D'où $\mathcal{P}(0)$.
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et montrons $\mathcal{P}(n+1)$.
On a, par hypothèse de récurrence, $u_{2n+2} \geqslant u_{2n} > 0$. Or, la fonction f est décroissante sur $]0, +\infty[$ donc, en composant deux fois par f, on obtient successivement

$$u_{2n+3} = f(u_{2n+2}) \leqslant f(u_{2n}) = u_{2n+1}$$

puis

$$u_{2n+4} = f(u_{2n+3}) \geqslant f(u_{2n+1}) = u_{2n+2}$$

d'où $\mathcal{P}(n+1)$.
On a montré par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{2(n+1)} \geqslant u_{2n}$. Ainsi,

$$\boxed{\text{la suite } (u_{2n})_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante.}}$$

□

c) Justifier que la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Démonstration. D'après la question ***4.a)*** : $u_2 > u_0$. Or, f est décroissante sur $]0,+\infty[$ donc $f(u_2) = u_3 \leqslant u_1 = f(u_0)$. On démontre ensuite par récurrence, de manière analogue à la question précédente, que pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_{2n+1} \geqslant u_{2n+3}$. Ainsi,

- la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante
- la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0

donc, par théorème de convergence monotone, la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge. □

5. Pour $x \in [0,+\infty[$ on pose : $h(x) = f \circ f(x)$. On pose également $h(0) = 0$.

a) Soit x un réel strictement positif. Déterminer $h(x)$.

Démonstration. Soit $x > 0$.

$$h(x) = f(f(x)) = \frac{\mathrm{e}^{-f(x)}}{f(x)} = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}}}{\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}} = x\mathrm{e}^{x}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}} = x\mathrm{e}^{x-\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}}$$

□

b) Démontrer que la fonction $h : x \mapsto h(x)$ est continue sur $[0,+\infty[$.

Démonstration. Tout d'abord, la fonction f est continue sur $]0,+\infty[$ et $f(]0,+\infty[) \subset]0,+\infty[$ (cf question ***1.a)***) donc h est continue sur l'intervalle ouvert $]0,+\infty[$ car elle y coïncide avec $f \circ f$.

Ensuite, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ donc, par composition de limites,

$$\lim_{x\to 0^+} h(x) = \lim_{x\to 0^+} f(f(x)) = \lim_{y\to+\infty} f(y) = 0 = h(0)$$

donc h est continue en 0. Finalement,

$$\boxed{h \text{ est continue sur } [0,+\infty[.}$$

□

c) Démontrer que l'équation $h(x) = x$, d'inconnue x, admet exactement deux solutions sur $[0,+\infty[$ qui sont 0 et α, α étant le réel introduit à la question ***3.b)***.

Démonstration. $h(0) = 0$ donc 0 est solution de l'équation $h(x) = x$ sur $[0,+\infty[$. Il reste à résoudre l'équation sur $]0,+\infty[$. Soit $x > 0$.

$$\begin{aligned}
h(x) = x &\iff x\mathrm{e}^{x-\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}} = x \\
&\iff \mathrm{e}^{x-\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}} = 1 && \textit{car } x \neq 0 \\
&\iff x - \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x} = 0 \\
&\iff x = f(x) \\
&\iff x = \alpha && \textit{cf question } \textbf{\textit{3.b)}}
\end{aligned}$$

□

d) En déduire la limite de la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n+3} = f \circ f(u_{2n+1}) = h(u_{2n+1})$. On sait que la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge (cf question ***4.c)***). Notons ℓ sa limite. On sait que la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0 (toujours question ***4.c)***) donc $\ell \geqslant 0$.
On en déduit que

- $u_{2n+3} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ (suite extraite)
- $u_{2n+3} = h(u_{2n+1}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} h(\ell)$ (par continuité de h en $\ell \in [0, +\infty[$, cf question ***5.b)***)

Par unicité de la limite, on a alors $\ell = h(\ell)$. Donc soit $\ell = 0$, soit $\ell = \alpha$ (cf question ***5.c)***).
Or, on sait que $u_1 = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ et par décroissance de la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, il vient : $\ell \leqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}}$. De plus, $\dfrac{1}{\mathrm{e}} < \alpha < 1$ (cf question ***3.c)***) donc $\ell < \alpha$. On a donc nécessairement

$$\boxed{\ell = 0.}$$

□

6. La suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle majorée ? Admet-elle une limite ?

Démonstration. Supposons que la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée. Alors, par théorème de convergence monotone (la suite est croissante, cf question ***4.b)***), on en déduit que la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Notons ℓ' sa limite.
Par un raisonnement analogue à celui de la question précédente, on obtient que ℓ' est un point fixe de h. Donc soit $\ell' = 0$, soit $\ell' = \alpha$.
Or $u_0 = 1$ et par croissance de la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, il vient : $\ell' \geqslant 1 > \alpha > 0$. C'est absurde.
On en déduit que

$$\boxed{\text{la suite } (u_{2n})_{n\in\mathbb{N}} \text{ n'est pas majorée et } u_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.}$$

□

EXERCICE 2

On considère la matrice A définie par $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Partie I - Réduction de la matrice A

1. a) Quel est le rang de la matrice $A - 2I$?

Démonstration. On a $A - 2I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ donc

$$\boxed{\mathrm{rg}(A - 2I) = 1 \text{ (les trois colonnes sont égales).}}$$

□

b) Justifier que 2 est valeur propre de la matrice A et déterminer la dimension du sous-espace propre E_2 associé à la valeur propre 2.

Démonstration. La matrice A est carrée d'ordre 3 et $\text{rg}(A - 2I) = 1 < 3$ donc la matrice $A - 2I$ est non inversible donc 2 est valeur propre de A. Par théorème du rang :

$$3 = \dim(E_2) + \text{rg}(A - 2I)$$

donc

$$\boxed{\dim(E_2) = 3 - 1 = 2.}$$

□

c) Donner une base de E_2.

Démonstration. Soit $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} U \in E_2 &\iff (A - 2I)U = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\ &\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \\ &\iff x = -y - z \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} E_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = -y - z \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} -y - z \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \left\{ y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

La famille $\mathcal{F}_2 = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$:

- engendre E_2
- est libre car constituée de deux vecteurs non colinéaires

donc

$$\boxed{\mathcal{F}_2 \text{ est une base de } E_2.}$$

□

d) Combien de valeurs propres autres que 2 la matrice A peut-elle avoir ?

Démonstration. Supposons que A possède deux valeurs propres autres que 2, que l'on note λ et μ. On note $U_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $U_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Soit U_3 un vecteur propre associé à la valeur propre λ et soit U_4 un vecteur propre associé à la valeur propre μ.
Puisque les familles (U_1, U_2), (U_3) et (U_4) sont toutes les trois libres et constituées de vecteurs propres de A, associés à des valeurs propres distinctes, on en déduit que la concaténation (U_1, U_2, U_3, U_4) est libre. Il vient alors

$$3 = \dim(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})) \geqslant \mathrm{Card}(U_1, U_2, U_3, U_4) = 4$$

C'est absurde, donc A possède au maximum une valeur propre autre que 2. $\square$

2. a) Dans cette sous-question M est une matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et U est le vecteur colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Que représentent les coordonnées du vecteur colonne MU pour la matrice M ?

Démonstration. Les coordonnées du vecteur colonne MU sont les sommes des coefficients sur chaque ligne de la matrice M. $\square$

b) En déduire la dernière valeur propre de A ainsi qu'une base du sous-espace propre associé.

Démonstration. On remarque que les sommes des coefficients sur chaque ligne de la matrice A sont toutes égales à 5. Il vient :

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Or, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ n'est pas le vecteur nul, donc 5 est valeur propre de A et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 5.
Par un raisonnement « dimensionnel » analogue à celui fait à la question ***1.d)***, on a nécessairement $\dim(E_5) = 1$.
Or,

- $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in E_5$
- La famille $\mathcal{F}_5 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est libre car constituée d'un unique vecteur non nul
- $\mathrm{Card}(\mathcal{F}_5) = \dim(E_5)$

donc

$$\boxed{\mathcal{F}_5 \text{ est une base de } E_5.}$$

$\square$

3. Donner une matrice $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale et une matrice $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que $A = PDP^{-1}$ (on ne demande pas de préciser la matrice P^{-1}).

Démonstration. D'après les questions précédentes : la famille $\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A, donc A est diagonalisable et par formule de changement de base, on a $A = PDP^{-1}$ où

$$\boxed{D = \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 5\end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\1 & 0 & 1\\0 & 1 & 1\end{pmatrix}.}$$

□

Partie II - Un système différentiel

On considère le système différentiel

$$(S) : \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x' & = & 3x & + & y & + & z \\ y' & = & x & + & 3y & + & z \\ z' & = & x & + & y & + & 3z \end{array}\right.$$

où x, y et z désignent des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

4. Résoudre le système différentiel (S).

Démonstration. On note $X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ de sorte que (x, y, z) est solution du système (S) si et seulement si $X' = AX$. On a vu en partie I que la matrice A est diagonalisable. Plus précisément,

- $\mathrm{Sp}(A) = \{2, 5\}$
- $\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ est une base de E_2
- $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ est une base de E_5

Ainsi, d'après la formule du cours, les solutions du système (S) dont de la forme :

$$X : t \mapsto \lambda_1 \mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda_2 \mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} + \lambda_3 \mathrm{e}^{5t}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \qquad (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$$

□

5. a) Quel résultat permet d'affirmer l'existence d'une unique solution $X_0 : t \mapsto \begin{pmatrix}x_0(t)\\y_0(t)\\z_0(t)\end{pmatrix}$ du système différentiel (S) telle que $X_0(0) = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$?

Démonstration. Il s'agit du théorème d'existence et d'unicité d'une solution à un problème de Cauchy. □

b) Déterminer la solution X_0 de la question précédente.

Démonstration. Soit $X : t \mapsto \lambda_1 \mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda_2 \mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} + \lambda_3 \mathrm{e}^{5t}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ une solution, où $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
X(0) = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} &\iff \lambda_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} + \lambda_3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\\
&\iff \begin{cases}\lambda_1 = -1\\ \lambda_2 = 0\\ \lambda_3 = 0\end{cases}
\end{aligned}$$

En effet, cette solution convient et c'est la seule puisque la famille $\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
Donc la solution du problème de Cauchy est

$$\boxed{X_0 : t \mapsto -\mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}.}$$

□

Partie III - Un second système différentiel

Dans cette partie, on considère la matrice $B = \begin{pmatrix}-1 & -4\\1 & 3\end{pmatrix}$.

6. Déterminer les valeurs propres de B.

Démonstration. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\lambda \text{ est valeur propre de } B &\iff B - \lambda I \text{ n'est pas inversible}\\
&\iff \det(B - \lambda I) = 0\\
&\iff \begin{vmatrix}-1-\lambda & -4\\ 1 & 3-\lambda\end{vmatrix} = 0\\
&\iff (-1-\lambda)(3-\lambda) + 4 = 0\\
&\iff \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0\\
&\iff (\lambda - 1)^2 = 0\\
&\iff \lambda = 1
\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\mathrm{Sp}(B) = \{1\}.}$$

□

7. La matrice B est-elle diagonalisable ?

Démonstration. Supposons la matrice B diagonalisable, alors il existe une matrice $D \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ diagonale et une matrice $P \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ inversible telles que $B = PDP^{-1}$. Les coefficients diagonaux de D sont les valeurs propres de B, donc $D = I$. On en déduit que

$$B = PIP^{-1} = PP^{-1} = I$$

C'est absurde, donc

$$\boxed{B \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

$\square$

8. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ tel que B est la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On considère aussi les vecteurs $v_1 = (2, -1)$ et $v_2 = (-1, 0)$.

a) Justifier que $\beta = (v_1, v_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

Démonstration. On a

- $\text{Card}(\beta) = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$
- la famille β est libre car constituée de deux vecteurs non colinéaires

donc

$$\boxed{\beta \text{ est une base de } \mathbb{R}^2.}$$

$\square$

b) Quelle est la matrice T de l'endomorphisme f dans la base β ?

Démonstration.

-
$$\begin{aligned} B\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

  donc, par isomorphisme de représentation matricielle : $f(v_1) = v_1 = 1v_1 + 0v_2$. D'où

$$\text{Mat}_\beta(f(v_1)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

-
$$\begin{aligned} B\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

  donc, par isomorphisme de représentation matricielle : $f(v_2) = 1v_1 + 1v_2$. D'où

$$\text{Mat}_\beta(f(v_2)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Finalement,

$$\boxed{T = \mathrm{Mat}_\beta(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

□

c) Donner une matrice Q inversible telle que $B = QTQ^{-1}$.

Démonstration. D'après la formule de changement de base, on a $B = QTQ^{-1}$ où

$$\boxed{Q = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.}$$

□

9. En déduire la résolution du système différentiel

$$(\Sigma) : \left\{ \begin{array}{ccccc} x' & = & -x & - & 4y \\ y' & = & x & + & 3y \end{array} \right.$$

où x et y désignent des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles.

Démonstration. On note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de sorte que (x, y) soit solution de (Σ) si et seulement si $X' = BX$.
On pose $Y = Q^{-1}X$. On a alors

$$X' = BX \iff (QY)' = B(QY) \iff QY' = BQY \iff Y' = Q^{-1}BQY = \iff Y' = TY$$

Résolvons le système différentiel linéaire $Y' = TY$. On note $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

$$Y' = TY \iff \left\{ \begin{array}{ccccc} a' & = & a & + & b \\ b' & = & & & b \end{array} \right.$$

Il existe une constante $C_2 \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $b(t) = C_2 \mathrm{e}^t$. On injecte cette expression dans la première équation différentielle du système, a est alors solution de l'équation :

$$a' = a + C_2 \mathrm{e}^t$$

La fonction $t \mapsto C_2 t\mathrm{e}^t$ est solution particulière, donc il existe une constante $C_1 \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $a(t) = C_1 \mathrm{e}^t + C_2 t \mathrm{e}^t$. D'où

$$\boxed{Y(t) = \begin{pmatrix} C_1 \mathrm{e}^t + C_2 t \mathrm{e}^t \\ C_2 \mathrm{e}^t \end{pmatrix}}$$

Ensuite,

$$\begin{aligned} X(t) &= QY(t) \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \mathrm{e}^t + C_2 t \mathrm{e}^t \\ C_2 \mathrm{e}^t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2C_1 \mathrm{e}^t + C_2(2t-1)\mathrm{e}^t \\ -C_1 \mathrm{e}^t - C_2 t \mathrm{e}^t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{X(t) = C_1 \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 2t-1 \\ -t \end{pmatrix}.}$$

□

EXERCICE 3

L'objet de cet exercice est d'introduire la fonction d'entropie qui mesure l'incertitude sur la valeur prise par une variable aléatoire donnée.

Notation

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel non nul et $[\![1,n]\!]$ désigne l'ensemble des entiers compris entre 1 et n :

$$[\![1,n]\!] = \{k \in \mathbb{N} \mid 1 \leqslant k \leqslant n\}$$

Les parties II et III sont indépendantes, mais utilisent des résultats de la partie I.

Partie I - Préliminaire

1. Soit $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = \begin{cases} x\ln(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

a) Démontrer que la fonction h est continue sur $\mathbb{R}^+$.

Démonstration.

- La fonction h est continue sur l'intervalle ouvert $]0,+\infty[$ comme produit de deux fonctions continues sur $]0,+\infty[$.
- $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0 = h(0)$ (par croissances comparées) donc h est continue en 0.

Finalement,

$$\boxed{\text{la fonction } h \text{ est continue sur } \mathbb{R}^+.}$$

□

b) La fonction h est-elle dérivable en 0 ?

Démonstration. Soit $x > 0$.

$$\begin{aligned} \frac{h(x)-h(0)}{x-0} &= \frac{h(x)}{x} \\ &= \frac{x\ln(x)}{x} \\ &= \ln(x) \end{aligned}$$

donc $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{h(x)-h(0)}{x-0} = -\infty$. On en déduit que h n'est pas dérivable en 0.

Commentaire

On pourrait préciser ici que le graphe de h admet une demi-tangente verticale en 0, orientée vers le bas.

□

c) Déterminer les antécédents de 0 par la fonction h.

Démonstration. On a $h(0) = 0$ donc 0 est un antécédent de 0 par h.
Soit $x > 0$.

$$\begin{aligned} h(x) = 0 &\iff x\ln(x) = 0 \\ &\iff \ln(x) = 0 && \textit{(car } x \neq 0\textit{)} \\ &\iff x = 1 \end{aligned}$$

Finalement,

$$\boxed{\text{les antécédents de } 0 \text{ par } h \text{ sont } 0 \text{ et } 1.}$$

□

2. Pour tout x dans $[0,1]$ on pose $g(x) = -h(x) - h(1-x)$.
Dresser le tableau de variations de la fonction g.

Démonstration. La fonction g est de la forme $g = -h - h \circ u$ où

- h est continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$.
- $u : x \mapsto 1 - x$ est continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$, et telle que
  - × $u(]0,1[) \subset]0,1[$
  - × $u([0,1]) \subset [0,1]$

donc

$$\boxed{g \text{ est continue sur } [0,1] \text{ et dérivable sur }]0,1[.}$$

Soit $x \in]0,1[$.

$$\begin{aligned} h'(x) &= \ln(x) + x\frac{1}{x} \\ &= \ln(x) + 1 \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} g'(x) &= -h'(x) - u'(x)h'(u(x)) \\ &= -(\ln(x) + 1) - (-1)(\ln(1-x) + 1) \\ &= -\ln(x) - 1 + \ln(1-x) + 1 \\ &= \ln(1-x) - \ln(x) \\ &= \ln\left(\frac{1}{x} - 1\right) \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} g'(x) \geqslant 0 &\iff \ln\left(\frac{1}{x} - 1\right) \geqslant 0 \\ &\iff \frac{1}{x} - 1 \geqslant 1 && \textit{(par stricte croissance de } \exp \textit{ sur } \mathbb{R}\textit{)} \\ &\iff \frac{1}{x} \geqslant 2 \\ &\iff x \leqslant \frac{1}{2} && \textit{(par stricte décroissance de } x \mapsto \frac{1}{x} \textit{ sur }]0,+\infty[\textit{)} \end{aligned}$$

De plus, $g(0) = -h(0) - h(1) = 0$, $g(1) = -h(1) - h(0) = 0$ et

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = -h\left(\frac{1}{2}\right) - h\left(\frac{1}{2}\right) = -2\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(2)$$

D'où le tableau de variations :

x	0	$\frac{1}{2}$	1
Signe de $g'(x)$	$\Vert$ $+$	0	$-$ $\Vert$
Variations de g	0 $\nearrow$	$\ln(2)$	$\searrow$ 0

$\square$

Partie II - Des variables aléatoires discrètes

Si X est une variable aléatoire discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, **l'entropie** de X est, sous réserve d'existence :

$$H(X) = - \sum_{x \in X(\Omega)} h(\mathbb{P}([X = x]))$$

En particulier, lorsque X est à valeurs dans un ensemble fini $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset \mathbb{R}$, l'entropie de X existe toujours et vaut :

$$H(X) = - \sum_{i=1}^{n} h(p_i)$$

où, pour tout i dans $[\![1, n]\!]$, $p_i = \mathbb{P}([X = x_i])$.

3. Dans cette question U est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme discrète sur $[\![1, n]\!]$. Déterminer $H(U)$.

Démonstration. U est une variable aléatoire finie donc $H(U)$ existe.
$U(\Omega) = [\![1, n]\!]$ donc

$$\begin{aligned} H(U) &= -\sum_{i=1}^{n} h(\mathbb{P}([U = i])) \\ &= -\sum_{i=1}^{n} h\left(\frac{1}{n}\right) && \textit{(pour tout } i \in [\![1, n]\!], \ \mathbb{P}([U = i]) = \frac{1}{n}\textit{)} \\ &= -\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \ln\left(\frac{1}{n}\right) && \textit{(car } \frac{1}{n} > 0\textit{)} \\ &= -n\frac{1}{n} \ln\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= \ln(n) \end{aligned}$$

Finalement,

$$\boxed{H(U) = \ln(n)}$$

$\square$

4. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in \,]0, 1[$. Démontrer que $H(X) \leqslant \ln(2)$ avec égalité si et seulement si $p = \dfrac{1}{2}$. On pourra utiliser la question *2*.

Démonstration. X est une variable aléatoire finie donc $H(X)$ existe.

$X(\Omega) = \{0, 1\}$ donc

$$\begin{aligned} H(X) &= -\sum_{i=0}^{1} h(\mathbb{P}([X = i])) \\ &= -h(\mathbb{P}([X = 0])) - h(\mathbb{P}([X = 1])) \\ &= -h(1-p) - h(p) \\ &= g(p) \end{aligned}$$

Or,

- $p \in \,]0, 1[$
- d'après le tableau de variations de la question *2*, la fonction g admet sur $]0, 1[$ un maximum atteint uniquement en $\dfrac{1}{2}$ et ce maximum vaut $\ln(2)$.

On en déduit que

$$\boxed{\text{pour tout } p \in \,]0, 1[,\ H(X) \leqslant \ln(2), \text{ et } H(X) = \ln(2) \text{ si et seulement si } p = \frac{1}{2}.}$$

□

5. Soient X_1 et X_2 deux variables indépendantes qui suivent des lois de Bernoulli de paramètres respectifs p_1 et p_2, définies sur le même espace probabilisé.

Soit Z la variable aléatoire telle que :

- $Z(\Omega) = \{0, 1\}$
- l'événement $[Z = 1]$ est réalisé si et seulement si l'événement « $X_1 + X_2$ est impair » est réalisé.

On définit le réel p par : $p = \mathbb{P}([Z = 1])$.

a) Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire $X_1 + X_2$?

Démonstration. On a $X_1(\Omega) = \{0, 1\}$ et $X_2(\Omega) = \{0, 1\}$.
Les différentes valeurs possibles pour $X_1 + X_2$ sont

- $0 + 0 = 0$
- $0 + 1 = 1$
- $1 + 0 = 1$
- $1 + 1 = 2$

Finalement,

$$\boxed{(X_1 + X_2)(\Omega) = \{0, 1, 2\}.}$$

□

b) Démontrer que $p = p_1(1 - p_2) + p_2(1 - p_1)$.

Démonstration. D'après la question précédente, l'unique valeur impair possible pour $X_1 + X_2$ est 1. On en déduit que

$$[Z = 1] = [X_1 + X_2 = 1]$$

La famille $([X_1 = 0], [X_1 = 1])$ est un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([Z=1]) &= \mathbb{P}([Z=1] \cap [X_1=0]) + \mathbb{P}([Z=1] \cap [X_1=1]) \\
&= \mathbb{P}([X_1+X_2=1] \cap [X_1=0]) + \mathbb{P}([X_1+X_2=1] \cap [X_1=1]) \\
&= \mathbb{P}([X_2=1] \cap [X_1=0]) + \mathbb{P}([X_2=0] \cap [X_1=1]) \\
&= \mathbb{P}([X_2=1])\mathbb{P}([X_1=0]) + \mathbb{P}([X_2=0])\mathbb{P}([X_1=1]) && \textit{(par indépendance)} \\
&= p_2(1-p_1) + (1-p_2)p_1
\end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{p = p_1(1-p_2) + p_2(1-p_1).}$$

□

c) Vérifier que $1 - 2p = (1-2p_1)(1-2p_2)$.

Démonstration. D'une part,

$$(1-2p_1)(1-2p_2) = 1 - 2p_1 - 2p_2 + 4p_1p_2$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
1-2p &= 1 - 2(p_1(1-p_2) + p_2(1-p_1)) \\
&= 1 - 2(p_1 - p_1p_2 + p_2 - p_1p_2) \\
&= 1 - 2(p_1 + p_2 - 2p_1p_2) \\
&= 1 - 2p_1 - 2p_2 + 4p_1p_2
\end{aligned}$$

On a bien

$$\boxed{1-2p = (1-2p_1)(1-2p_2).}$$

Commentaire

Il faut penser à la formule des probabilités totales dès que l'on étudie la loi d'une somme de variables aléatoires discrètes.

□

6. Soit $p \in \,]0,1[$ et $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires (mutuellement) indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre p.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ et on considère la variable aléatoire Z_n telle que :

- $Z_n(\Omega) = \{0,1\}$
- l'événement $[Z_n = 1]$ est réalisé si et seulement si l'événement « S_n est impair » est réalisé.

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la loi de la variable aléatoire S_n ?

Démonstration. Les variables aléatoires X_k :

- suivent toutes la même loi de Bernoulli de paramètre p
- sont indépendantes

donc

$$\boxed{S_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p).}$$

$\square$

b) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $1 - 2\mathbb{P}([Z_n = 1]) = (1-2p)^n$ (*on pourra raisonner par récurrence*).

Démonstration. On note dans cette preuve, pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_n = \mathbb{P}([Z_n = 1])$.
Montrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$
où $\mathcal{P}(n)$: « $1 - 2u_n = (1-2p)^n$ ».
Initialisation :
$S_1 = X_1$ d'où $[Z_1 = 1] = [X_1 = 1]$ et donc $u_1 = p$.
Ainsi, d'une part $1 - 2u_1 = 1 - 2p$
et d'autre part $(1-2p)^1 = 1 - 2p$.
D'où $\mathcal{P}(1)$.
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathcal{P}(n)$. Montrons $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\begin{array}{rcl}
Z_{n+1} \text{ prend la valeur } 1 & \Longleftrightarrow & S_{n+1} \text{ prend une valeur impaire} \\
& \Longleftrightarrow & \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} X_k \text{ prend une valeur impaire} \\
& \Longleftrightarrow & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k + X_{n+1} \text{ prend une valeur impaire} \\
& \Longleftrightarrow & S_n + X_{n+1} \text{ prend une valeur impaire} \\
& \Longleftrightarrow & \begin{array}{l} S_n \text{ prend une valeur impaire et } X_{n+1} \text{ prend la valeur } 0 \\ \textbf{ou } S_n \text{ prend une valeur paire et } X_{n+1} \text{ prend la valeur } 1 \end{array} \\
& \Longleftrightarrow & \begin{array}{l} Z_n \text{ prend la valeur 1 et } X_{n+1} \text{ prend la valeur } 0 \\ \textbf{ou } Z_n \text{ prend la valeur 0 et } X_{n+1} \text{ prend la valeur } 1 \end{array} \\
& \Longleftrightarrow & Z_n + X_{n+1} \text{ prend une valeur impaire}
\end{array}$$

On utilise pour la dernière équivalence le raisonnement effectué aux questions ***5.a)*** et ***5.b)***, en remarquant que $Z_n \hookrightarrow \mathcal{B}(u_n)$ et $X_{n+1} \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.
Ainsi, d'après la question ***5.c)*** (que l'on peut utiliser car Z_n et X_{n+1} sont indépendantes par lemme des coalitions), on a :

$$1 - 2u_{n+1} = (1 - 2u_n)(1 - 2p)$$

Or, par hypothèse de récurrence :

$$1 - 2u_n = (1-2p)^n$$

Donc

$$1 - 2u_{n+1} = (1-2p)^n(1-2p) = (1-2p)^{n+1}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.
On a bien démontré le résultat par récurrence.

Commentaire

Cette question est nettement plus difficile que les questions rencontrées jusqu'à maintenant, pour deux raisons :

- on doit travailler sur la notion de nombre pair et impair, ce qui n'est pas très courant en ECG (bien qu'il s'agisse d'une notion vue dans les petites classes). Ceci est dû au fait qu'il n'y a pas d'arithmétique au programme. Les réflexes peuvent alors manquer même sur des raisonnements assez élémentaires.
- il faut réutiliser habilement les résultats des questions précédentes, alors que les notations n'aident pas à la compréhension (p ne désigne plus la même chose par exemple).

On peut cependant proposer une autre preuve, plus calculatoire et ne profitant pas des résultats précédents, mais peut être plus dans l'esprit de ce qui est fait habituellement. On applique encore une fois la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $([X_{n+1} = 0], [X_{n+1} = 1])$.

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}([Z_{n+1} = 1]) \\
=&\mathbb{P}([Z_{n+1} = 1] \cap [X_{n+1} = 0]) + \mathbb{P}([Z_{n+1} = 1] \cap [X_{n+1} = 1]) \\
=&\mathbb{P}([Z_n = 1] \cap [X_{n+1} = 0]) + \mathbb{P}([Z_n = 0] \cap [X_{n+1} = 1]) && \textit{(on raisonne ici sur la parité)} \\
=&\mathbb{P}([Z_n = 1])\mathbb{P}([X_{n+1} = 0]) + \mathbb{P}([Z_n = 0])\mathbb{P}([X_{n+1} = 1]) && \textit{(lemme des coalitions)} \\
=&u_n(1 - p) + (1 - u_n)p \\
=&u_n(1 - 2p) + p
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
1 - 2u_{n+1} &= 1 - 2(u_n(1 - 2p) + p) \\
&= 1 - 2p - 2u_n(1 - 2p) \\
&= (1 - 2p)(1 - 2u_n)
\end{aligned}$$

et la fin du raisonnement est identique.

□

c) Démontrer que $H(Z_n) \leqslant \ln(2)$. Dans quel(s) cas a-t-on égalité ?

Démonstration. On note encore dans cette preuve, pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_n = \mathbb{P}([Z_n = 1])$. On a remarqué à la question précédente que $Z_n \hookrightarrow \mathcal{B}(u_n)$. D'après la question *4*, on a $H(Z_n) \leqslant \ln(2)$ et $H(Z_n) = \ln(2)$ si et seulement si $u_n = \dfrac{1}{2}$.
Or,

$$\begin{aligned}
u_n = \frac{1}{2} &\iff 1 - 2u_n = 0 \\
&\iff (1 - 2p)^n = 0 && \textit{(cf question } \boldsymbol{6.b}\textit{))} \\
&\iff 1 - 2p = 0 \\
&\iff p = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\boxed{H(Z_n) \leqslant \ln(2) \text{ et } H(Z_n) = \ln(2) \text{ si et seulement si } p = \frac{1}{2}.}$$

$\square$

Partie III - Des variables à densité

Si X est une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ de densité f, on dit que X admet une entropie lorsque l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h \circ f(t)\, dt$ converge absolument ; **l'entropie** de X est alors :

$$H(X) = -\int_{-\infty}^{+\infty} h \circ f(t)\, dt$$

7. Soit U une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[a, b]$ où a et b sont des réels tels que $a < b$.

a) Démontrer que U admet une entropie.

Démonstration. La variable aléatoire U admet pour densité la fonction

$$f : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ \frac{1}{b-a} & \text{si } a \leqslant t \leqslant b \\ 0 & \text{si } t > b \end{cases}$$

Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$h \circ f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ \frac{1}{b-a} \ln\left(\frac{1}{b-a}\right) & \text{si } a \leqslant t \leqslant b \\ 0 & \text{si } t > b \end{cases}$$

donc

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |h \circ f(t)|\, dt &= \int_a^b |h \circ f(t)|\, dt && \textit{(car } h \circ f \textit{ est nulle en dehors de } [a, b]\textit{)} \\ &= \int_a^b \frac{1}{b-a} \left|\ln\left(\frac{1}{b-a}\right)\right| dt \end{aligned}$$

La fonction $t \mapsto \frac{1}{b-a}\left|\ln\left(\frac{1}{b-a}\right)\right|$ est constante donc continue sur le segment $[a, b]$.

On en déduit que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |h \circ f(t)|\, dt$ converge et donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h \circ f(t)\, dt$ converge absolument.

$$\boxed{U \text{ admet une entropie.}}$$

$\square$

b) Déterminer $H(U)$.

Démonstration. On reprend le calcul précédent sans les valeurs absolues.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} h \circ f(t)\, dt &= \int_a^b h \circ f(t)\, dt && \textit{(car } h \circ f \textit{ est nulle en dehors de } [a, b]\textit{)} \\ &= \int_a^b \frac{1}{b-a} \ln\left(\frac{1}{b-a}\right) dt \\ &= \ln\left(\frac{1}{b-a}\right) \\ &= -\ln(b-a) \end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{H(U) = \ln(b-a).}$$

□

8. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, de densité f.

a) Justifier la convergence de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} tf(t)\ dt$ et déterminer sa valeur.

Démonstration. D'après le cours, X admet une espérance et

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\ dt \\ &= \int_0^{+\infty} tf(t)\ dt \qquad \textit{(car f est nulle en dehors de $[0,+\infty[$)}\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\int_0^{+\infty} tf(t)\ dt \text{ converge et } \int_0^{+\infty} tf(t)\ dt = \mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}}$$

□

b) Démontrer que X admet une entropie et que $H(X) = 1 - \ln(\lambda)$.

Démonstration. On choisit comme densité de X la fonction

$$f : t \mapsto \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} |h \circ f(t)|\ dt &= \int_0^{+\infty} |h \circ f(t)|\ dt \qquad \textit{(car $h \circ f$ est nulle en dehors de $[0,+\infty[$)} \\ &= \int_0^{+\infty} |f(t)\ln(f(t))|\ dt \qquad \textit{(car pour tout $t \in [0,+\infty[$, $f(t) > 0$)} \\ &= \int_0^{+\infty} f(t) \left|\ln(\lambda e^{-\lambda t})\right|\ dt \\ &= \int_0^{+\infty} f(t) \left|\ln(\lambda) - \lambda t\right|\ dt\end{aligned}$$

Or,

$$\ln(\lambda) - \lambda t \geqslant 0 \iff \ln(\lambda) \geqslant \lambda t \iff t \leqslant \frac{\ln(\lambda)}{\lambda}$$

et $t \mapsto \lambda e^{-\lambda t} |\ln(\lambda) - \lambda t|$ est continue sur $[0,+\infty[$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,|\ln(\lambda) - \lambda t|\ dt$ est uniquement impropre en $+\infty$.

On en déduit que

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} |h \circ f(t)| \ dt \text{ converge} &\iff \int_{0}^{+\infty} f(t) \left|\ln(\lambda) - \lambda t\right| \ dt \text{ converge} \\
&\iff \int_{\frac{\ln(\lambda)}{\lambda}}^{+\infty} f(t) \left|\ln(\lambda) - \lambda t\right| \ dt \text{ converge} \\
&\iff \int_{\frac{\ln(\lambda)}{\lambda}}^{+\infty} f(t)(\lambda t - \ln(\lambda)) \ dt \text{ converge}
\end{aligned}$$

Or,

- $\displaystyle\int_{\frac{\ln(\lambda)}{\lambda}}^{+\infty} \lambda t f(t) \ dt$ converge d'après la question ***8.a)***
- $\displaystyle\int_{\frac{\ln(\lambda)}{\lambda}}^{+\infty} \ln(\lambda) f(t) \ dt$ converge car f est une densité

Par linéarité de l'intégrale, l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{\ln(\lambda)}{\lambda}}^{+\infty} f(t)(\lambda t - \ln(\lambda)) \ dt$ converge et finalement

$$\boxed{X \text{ admet une entropie.}}$$

Commentaire

On aurait aussi pu utiliser un théorème de comparaison.
En effet, par inégalité triangulaire, pour tout $t \geqslant 0$:

$$|\ln(\lambda) - \lambda t| \leqslant |\ln(\lambda)| + \lambda t$$

donc

$$0 \leqslant f(t) \left|\ln(\lambda) - \lambda t\right| \leqslant \left|\ln(\lambda)\right| f(t) + \lambda t f(t)$$

et les intégrales $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \lambda t f(t) \ dt$ et $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \ln(\lambda) f(t) \ dt$ convergent par les mêmes arguments que précédemment. Donc par linéarité $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} (\left|\ln(\lambda)\right| f(t) + \lambda t f(t)) \ dt$ converge et par théorème de comparaison pour les intégrales généralisées de fonctions continues et positives, on obtient bien que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |h \circ f(t)| \ dt$ converge.

De plus, en reprenant le calcul précédent sans les valeurs absolues, on a :

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} h \circ f(t) \ dt &= \int_{0}^{+\infty} f(t)(\ln(\lambda) - \lambda t) \ dt \\
&= \ln(\lambda) \int_{0}^{+\infty} f(t) \ dt - \lambda \int_{0}^{+\infty} t f(t) \ dt && \textit{(par linéarité)} \\
&= \ln(\lambda) \times 1 - \lambda \times \frac{1}{\lambda} && \textit{(cf question \textbf{8.a)} et car } f \textit{ est une densité)} \\
&= \ln(\lambda) - 1
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{H(X) = 1 - \ln(\lambda).}$$

□

9. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi normale $\mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right)$ où $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$. On note ϕ la densité usuelle de la variable aléatoire X.

a) Donner l'espérance et la variance de X. En déduire la valeur de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \phi(t)\, dt$.

Démonstration. D'après le cours, X admet une espérance et une variance et

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = m \qquad \text{et} \qquad \mathbb{V}(X) = \sigma^2}$$

D'après la formule de Kœnig-Huygens, X admet un moment d'ordre 2 et

- D'une part
$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$$
donc
$$\mathbb{E}(X^2) = \sigma^2 + m^2$$
- D'autre part, par théorème de transfert :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \phi(t)\ dt = \mathbb{E}(X^2)$$

D'où

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \phi(t)\ dt = \sigma^2 + m^2.}$$

□

b) Démontrer que X admet une entropie et que $H(X) = \dfrac{1 + \ln(2\pi\sigma^2)}{2}$.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} |h \circ \phi(t)|\ dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} |\phi(t) \ln(\phi(t))|\ dt \qquad \textit{(car pour tout } t \in \mathbb{R},\ \phi(t) > 0\textit{)} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t) \left| \ln\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-m}{\sigma}\right)^2} \right) \right|\ dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t) \left| -\ln(\sigma\sqrt{2\pi}) - \frac{1}{2}\left(\frac{t-m}{\sigma}\right)^2 \right|\ dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t) \left| \ln(\sigma\sqrt{2\pi}) + \frac{1}{2}\left(\frac{t-m}{\sigma}\right)^2 \right|\ dt
\end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned}
\phi(t) \left| \ln(\sigma\sqrt{2\pi}) + \frac{1}{2}\left(\frac{t-m}{\sigma}\right)^2 \right| &\leqslant \phi(t) \left(\left|\ln(\sigma\sqrt{2\pi})\right| + \frac{1}{2}\left(\frac{t-m}{\sigma}\right)^2 \right) \\
&\leqslant \phi(t) \left(\left|\ln(\sigma\sqrt{2\pi})\right| + \frac{t^2 + 2\,|m|\,|t| + m^2}{2\sigma^2} \right)
\end{aligned}$$

Or,

- L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t)\ dt$ converge car ϕ est une densité

- L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |t|\,\phi(t)\;dt$ converge car X admet une espérance
- L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\phi(t)\;dt$ converge d'après la question ***9.a)***

Donc, par linéarité, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t)\left(\left|\ln(\sigma\sqrt{2\pi})\right| + \frac{t^2+2\,|m|\,|t|+m^2}{2\sigma^2}\right)\;dt$ converge.
Il suit par théorème de comparaison pour les intégrales généralisées de fonctions continues et positives que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t)\left|\ln(\sigma\sqrt{2\pi}) + \frac{1}{2}\left(\frac{t-m}{\sigma}\right)^2\right|\;dt$ converge.
Finalement,

$$\boxed{X \text{ admet une entropie.}}$$

De plus, en reprenant le calcul précédent sans les valeurs absolues, on a :

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} h\circ f(t)\;dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t)\left(-\ln(\sigma\sqrt{2\pi}) - \frac{1}{2}\left(\frac{t-m}{\sigma}\right)^2\right)\;dt\\
&= -\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t)\left(\ln(\sigma\sqrt{2\pi}) + \frac{t^2-2mt+m^2}{2\sigma^2}\right)\;dt\\
&= -\left(\ln(\sigma\sqrt{2\pi}) + \frac{m^2}{2\sigma^2}\right)\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t)\;dt + \frac{m}{\sigma^2}\int_{-\infty}^{+\infty} t\phi(t)\;dt - \frac{1}{2\sigma^2}\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\phi(t)\;dt\\
&= -\left(\ln(\sigma\sqrt{2\pi}) + \frac{m^2}{2\sigma^2}\right) + \frac{m}{\sigma^2}m - \frac{1}{2\sigma^2}(\sigma^2+m^2)\\
&= -\ln(\sigma\sqrt{2\pi}) - \cancel{\frac{m^2}{2\sigma^2}} + \cancel{\frac{m^2}{\sigma^2}} - \frac{1}{2} - \cancel{\frac{m^2}{2\sigma^2}}\\
&= -\frac{2\ln(\sigma\sqrt{2\pi})+1}{2}\\
&= -\frac{\ln(\sigma^2 2\pi)+1}{2}
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{H(X) = \frac{1+\ln(2\pi\sigma^2)}{2}.}$$

Commentaire

La preuve précédente a été faite pour rester dans l'esprit de l'énoncé, en utilisant la question précédente. Cependant, une utilisation astucieuse du théorème de transfert permettait ici de voir l'entropie comme l'espérance d'une certaine transformée de X et de s'épargner beaucoup de calculs. C'est le choix (préférable il me semble) qui avait été fait dans le sujet `ESSEC II 2019`. On y renvoie pour les détails de l'argument.

□