PSI 2022-2023

Khôlles de Mathématiques - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`
Paul Valéry, Paris 12ème.

Planche de khôlles n°1

Semaine du 03/01

Question de cours

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(1) Déterminer le polynôme caractéristique puis les valeurs propres de A.
(2) A est-elle diagonalisable ?

Exercice 1

Pour $x > 0$, on pose $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+nx}$.

(1) Justifier que S est bien définie puis continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
(2) Déterminer la limite de S en $+\infty$.
(3) Établir que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour $x > 0$, expliciter $S'(x)$ sous forme d'une somme qu'on ne cherchera pas à calculer.

Exercice 2

On appelle fonction ζ de Riemann la fonction de la variable $s \in \mathbb{R}$ définie par la formule

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}.$$

(1) Déterminer le domaine de définition de ζ et montrer que la fonction est strictement décroissante sur celui-ci.
(2) Montrer que ζ est continue sur son domaine de définition.
(3) Déterminer la limite de $\zeta(s)$ lorsque $s \to +\infty$.
(4) Montrer que pour tout entier $k \geq 1$ et tout réel $s > 0$,

$$\frac{1}{(k+1)^s} \leq \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}x}{x^s} \leq \frac{1}{k^s}.$$

En déduire que

$$\zeta(s) \sim \frac{1}{s-1}, \qquad s \to 1^+.$$

Planche de khôlles n°2

Semaine du 03/01

Question de cours

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.

(1) Déterminer le polynôme caractéristique puis les valeurs propres de A.
(2) A est-elle diagonalisable ?

Exercice 1

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \geq 0$ on définit $f_n(x) = (-1)^n \ln\left(1 + \dfrac{x}{n(1+x)}\right)$.

(1) Montrer que la série $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.

(2) Montrer que la série $\sum u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.
(*On pourra utiliser une inégalité classique de convexité.*)

(3) La convergence est-elle normale sur $\mathbb{R}_+$?

Exercice 2

On considère, pour $x \in \mathbb{R}$, $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n^2 + x^2}$.

(1) Montrer que S est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.
(2) Soient $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\int_n^{n+1} \frac{x}{x^2+t^2}\mathrm{d}t \leq \frac{x}{x^2+n^2} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{x}{x^2+t^2}\mathrm{d}t.$$

(3) En déduire que S admet une limite en $+\infty$ que l'on déterminera.

PSI 2022-2023

Khôlles de Mathématiques - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`
Paul Valéry, Paris 12ème.

Planche de khôlles n°3

Semaine du 03/01

Question de cours

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$.

(1) Déterminer, sans calculer le polynôme caractéristique, les valeurs propres de A.
A est-elle diagonalisable ?

(2) Plus généralement, donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice de rang 1 soit diagonalisable.

Exercice 1

Soit (f_n) une suite de fonctions définies et décroissantes sur $[0;1]$ qui converge simplement vers la fonction nulle.
Montrer que la convergence est uniforme.

Exercice 2

On considère la série de fonctions $\sum_{n\geq 2} u_n$ avec $u_n = \dfrac{xe^{-nx}}{\ln(n)}$.

(1) Démontrer que la série $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.

(2) Montrer que la convergence n'est pas normale sur $\mathbb{R}_+$.

(3) Pour $x \geq 0$, on pose $R_n(x) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_n(x)$.

(a) Montrer que, pour tout $x > 0$,

$$0 \leq R_n(x) \leq \frac{xe^{-x}}{\ln(n+1)(1-e^{-x})}$$

(b) Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{xe^{-x}}{(1-e^{-x})}$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

(c) Conclure quant à la convergence uniforme de la série.