PSI 2022-2023

Khôlles de Mathématiques - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`
Paul Valéry, Paris 12ème.

Planche de khôlles n°1

Semaine du 03/01

Question de cours

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(1) Le calcul donne $\chi_A(X) = (X-1)(X-2)(X+4)$. Il suit que $\mathrm{Sp}(A) = \{1, 2, -4\}$.
(2) A possède 3 valeurs propres distinctes : elle est diagonalisable (autre argument : le polynôme caractéristique est scindé à racines simples).

Exercice 1

Pour $x > 0$, on pose $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+nx}$.

(1) Notons, pour $n \in \mathbb{N}$

$$f_n : \ x \longmapsto \frac{(-1)^n}{1+nx}$$

On commence par justifier que S est bien définie en montrant la convergence simple de la série de fonctions $\sum f_n$ en appliquant le critère (spécial) des séries alternées.
En effet, pour $x > 0$, on a

$$|f_n(x)| = \frac{1}{1+nx} \sim \frac{1}{nx} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

et, comme $n \leq n+1$ et que $x > 0$, on a bien

$$|f_{n+1}(x)| = \frac{1}{1+(n+1)x} \leq \frac{1}{1+nx} = |f_n(x)|$$

donc la suite $(|f_n|)_n$ est décroissante. On a donc bien convergence (simple) de la série de fonctions vers S.

Afin de montrer que S est continue, il faut montrer que la convergence de la série est uniforme. En effet, comme, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, cela suffit. D'après la critère des séries alternées, on a en fait

$$|R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \right| \leq |f_{n+1}(x)| = \frac{1}{1+(n+1)x}.$$

Il n'est alors pas possible de montrer que la convergence est uniforme sur $\mathbb{R}_+^*$. Qu'à cela ne tienne. Posons $a > 0$. Pour tout $x \geq a$, on a alors

$$R_n(x)| \leq \frac{1}{1+(n+1)x} \leq \frac{1}{1+(n+1)a}$$

Ainsi, comme le majorant est indépendant de x,

$$\sup_{x \geq a} |S(x) - S_n(x)| \leq \frac{1}{1+(n+1)a} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

et la série converge uniformément sur $[a, +\infty[$. Comme f_n est continue sur $[a, +\infty[$, alors S est aussi continue sur $[a, +\infty[$. Comme c'est vrai pour tout $a > 0$, S est en fait continue sur $]0; +\infty[$.

(2) Soit $x > 1$. Comme la convergence est uniforme sur $[1, +\infty[$, on a

$$\lim_{x\to+\infty} S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} f_n(x).$$

Comme $f_0(x) = 1$ et, pour tout $n \geq 1$, $f_n(x) \to 0$, $x \to +infty$, on obtient que

$$\lim_{x\to+\infty} S(x) = 1.$$

(3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on voit que f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que

$$f_n'(x) = \frac{(-1)^{n+1}n}{(1+nx)^2}.$$

On montre alors, comme précédemment que la série $\sum f_n'$ converge uniformément sur tout intervalle $[a, +\infty[$, ceci entrainant donc que S est $\mathcal{C}^1$ sur ce même intervalle (et donc partout sur $\mathbb{R}_+^*$e et que

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x).$$

On applique encore une fois le critère des séries alternées et la majoration du reste. On a

$$|f_n'(x) - f_{n+1}'(x)| = \frac{n(n+1)x^2 - 1}{(1+nx)^2(1+(n+1)x)^2} \geq \frac{n(n+1)x^2 - 1}{(1+nx)^2(1+(n+1)x)^2}$$

Ainsi, en choisissant n assez grand (c'est à dire $n \geq n_0$ avec n_0 qui ne dépend que de a), on a

$$n(n+1)a^2 - 1 \geq 0$$

et donc, par transitivité, pour tout $x \geq a$,

$$|f_n'(x)| - |f_{n+1}'(x)| \geq 0$$

et (pour tout $x \geq a$), $(|f_n'(x)|)_n$ est décroissante. Étant clair que, pour $x > 0$ fixé, et $n \to +\infty$

$$|f_n'(x)| \sim \frac{n}{n^2x^2} = \frac{1}{nx^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

le critère des séries alternées s'applique encore et $\sum f_n'$ converge simplement (sur $[a, +\infty[$). La majoration du reste, noté T_n donne ici

$$|T_n(x)| \leq |f_{n+1}'(x)| = \frac{n+1}{(1+(n+1)x)^2} \leq \frac{n+1}{(1+(n+1)a)^2}$$

pour $x \geq a$. Comme précédemment on a donc majoré le reste par une quantité qui tend vers 0 et indépendante de x donc la convergence est uniforme. Ainsi, S est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$ et ceci étant vrai pour tout $a > 0$, c'est en fait le cas sur $]0; +\infty[$.

Planche de khôlles n°2

Semaine du 03/01

Question de cours

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.

(1) Un calcul donne $\chi_A(X) = X^3 - 5X^2 + 8X - 4 = (X-1)^2(X-2)$. On a donc deux valeurs propres 1 et 2.

(2) Il nous faut connaitre les dimensions des sous-espaces propres pour répondre. On résout donc $X \in \ker(A - \lambda I)$ successivement pour $\lambda = 1$ puis $\lambda = 2$. On trouve

$$E_1(A) = \ker(A - \lambda I) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right), \quad \text{et} \quad E_2(A) = \ker(A - 2I) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Ainsi, $\dim E_1(A) + \dim E_2(A) = 3$ et donc A est bien diagonalisable.

Exercice 1

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \geq 0$ on définit $f_n(x) = (-1)^n \ln\left(1 + \frac{x}{n(1+x)}\right)$.

(1) On utilise le critère des séries alternées. On a

$$|f_n(x)| = \ln\left(1 + \frac{x}{n(1+x)}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

car $\frac{x}{n(1+x)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Puis, comme $n \leq n+1$ et $x \geq 0$, on a $n(1+x) \leq (n+1)(1+x)$ puis par passage à l'inverse et composition avec le log croissant, on obtient

$$|f_{n+1}(x)| = \ln\left(1 + \frac{x}{(n+1)(1+x)}\right) \leq \ln\left(1 + \frac{x}{n(1+x)}\right) = |f_n(x)|.$$

La suite $(|f_n])_n$ est bien décroissante vers 0, la série converge simplement.

(2) Le critère des séries alternées permet aussi de majorer le reste. On a

$$|R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)\right| \leq |f_{n+1}(x)| = \ln\left(1 + \frac{x}{(n+1)(1+x)}\right) \leq \frac{x}{(n+1)(1+x)} \leq \frac{1}{n+1},$$

où on a utilisé successivement que $\ln(1+t) \leq t$ (inégalité classique de convexité) et le fait que $x/(1+x) \leq 1$. Le majorant est indépendant de x et tend vers 0 : la convergence est alors uniforme.

(3) En observant que

$$|f_n(1)| = \ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right) \sim \frac{1}{2n}$$

on a que $\sum |f_n(1)|$ diverge. Comme $||f_n||_\infty \geq |f_n(1)|$, il est clair que la série ne converge pas normalement.

PSI 2022-2023

Khôlles de Mathématiques - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`
Paul Valéry, Paris 12ème.

Planche de khôlles n°3

Semaine du 03/01

Question de cours

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$.

(1) La matrice a 4 fois la même colonne, non nulle. Elle est donc de rang 1 en particulier, elle n'est pas inversible, donc 0 est valeur propre et la dimension du noyau est égale à 3 (par le théorème du rang). Ainsi X^3 divise $\chi_A(X)$. Comme $\chi_A(X)$ est unitaire et de degré 4, il existe donc λ réel tel que

$$\chi_A(X) = X^3(X - \lambda)$$

La somme des valeur propres étant égale à la trace de A, on déduit que $\lambda = 10$ donc

$$\chi_A(X) = X^3(X - 10)$$

La somme des dimensions des sous-espaces propres étant égale à 4, la matrice est diagonalisable.

(2) En imposant une trace non nulle et en reprenant les arguments ci-dessus, on a donc deux valeurs propre : la trace de la matrice, de multiplicité 1 et 0 de multiplicité $n-1$ et c'est diagonalisable.

Exercice 1

Pour tout n la fonction f_n est décroissante sur $[0;1]$, ainsi, on peut écrire, pour tout $x \in [0;1]$,

$$f_n(1) \leq f_n(x) \leq f_n(0)$$

ou encore

$$\sup_{x\in[0;1]} |f_n(x)| \leq \max\left(|f_n(0)|, |f_n(1)|\right)$$

Les deux quantités $f_n(0)$ et $f_n(1)$ tendant vers 0 par hypothèse de convergence simple, on a bien la convergence uniforme vers 0.

Exercice 2

On considère la série de fonctions $\sum_{n\geq 2} u_n$ avec $u_n = \dfrac{xe^{-nx}}{\ln(n)}$.

(1) Pour $x=0$, il s'agit d'une série de terme général nul : elle converge. Pour $x>0$, on a clairement

$$u_n = \frac{xe^{-nx}}{\ln(n)} = o\left(\left(\frac{1}{e^x}\right)^n\right)$$

et $\sum \left(\frac{1}{e^x}\right)^n$ est une série géométrique convergente (car $x>0$ donc la raison $e^{-x} \in]0;1[$). Par critère de comparaison par négligeabilité pour des séries à termes positifs, il y a bien convergence.

(2) Il suffit d'étudier, pour n fixé la fonction $u_n : x \mapsto \frac{xe^{-nx}}{\ln(n)}$. On a

$$u_n'(x) = \frac{(1-nx)e^{-nx}}{\ln(n)}$$

ce qui donne

x	0		$1/n$		$+\infty$
$u_n'(x)$		$+$	0	$-$	
u_n	0	$\nearrow$	$u_n(1/n)$	$\searrow$	0

Ainsi,

$$||u_n||_\infty = u_n(1/n) = \frac{e^{-1}}{n\ln(n)}$$

Or la série $\sum \frac{1}{n\ln(n)}$ diverge (on peut dire que c'est une série de Bertrand divergente ou bien on fait une comparaison série/intégrale) et la série de fonction $\sum u_n$ ne converge pas normalement.

(3) Pour $x \geq 0$, on pose $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_n(x)$.

(a) Soit $x>0$, il est clair que $R_n(x) \geq 0$. De plus, par croissance de la fonction ln

$$\begin{aligned}
R_n(x) &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{xe^{-kx}}{\ln(k)} \\
&\leq \frac{x}{\ln(n+1)} \sum_{k=n+1}^{+\infty} e^{-kx} \\
&= \frac{x}{\ln(n+1)} \times e^{-(n+1)x} \times \frac{1}{1-e^{-x}} \\
&= \frac{xe^{-xn}}{(e^x-1)\ln(n+1)} \leq \frac{x}{(e^x-1)\ln(n+1)} \\
&\leq \frac{1}{\ln(n+1)}
\end{aligned}$$

où on a utilisé l'inégalité de convexité $e^x \geq 1+x$ donc $e^x-1 \geq x$. Comme $1/\ln(n+1)$ tend vers 0 et est indépendant de x, la convergence est bien uniforme.