PSI 2022-2023

Khôlles de Mathématiques - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`
Paul Valéry, Paris 12ème.

Planche de khôlles n°1

Semaine du 03/10

Question de cours

Soit f une application linéaire sur un espace vectoriel E. Montrer que

$$\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f).$$

Exercice 1

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}^n$. On considère un endomorphisme f de E tel que

$$f^2 = -\mathrm{Id}.$$

(1) (a) Soit $u \in E$, $u \neq 0$. Montrer, par l'absurde, que la famille $(u, f(u))$ est libre.
 (b) Montrer que le sous-espace $F_u = \mathrm{Vect}(u, f(u))$ est *stable* sous l'action de f.

(2) Dans cette question uniquement on considère le cas $n = 2$.
 (a) Donner, en exhibant une matrice qui représenterait f dans la base canonique, un exemple d'un tel endomorphisme.
 (b) À l'aide de la question 1a, montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f présente des 0 sur la diagonale. Expliciter la matrice trouvée.

(3) On revient au cas général. On suppose que $n = 2k$ est pair.

 Montrer qu'il existe, par récurrence, une famille de vecteurs $(u_1, u_2, ..., u_k)$ tels que la famille

$$(u_1, f(u_1), u_2, f(u_2), ..., u_k, f(u_k))$$

 forme une base de E. Quelle est alors la matrice de f dans cette base?

Exercice 2

Soient $u = (1, 0, 0)$, $v = (1, 1, 1)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et $F = \mathrm{Vect}(u, v)$. Trouver un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $\mathrm{Ker}(f) = F$.

PSI 2022-2023

Khôlles de Mathématiques - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`
Paul Valéry, Paris 12ème.

Planche de khôlles n°2

Semaine du 03/10

Question de cours

Déterminer une base de chacun des sous-espaces $E_\lambda(A) = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) : AX = \lambda X\}$ pour $\lambda = 1$ puis $\lambda = 2$, où

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Vérifier que $E_1(A) \oplus E_2(A) = \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Exercice 1

On considère la matrice $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

et l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ de $\mathbb{R}^4$ est A.

(1) Montrer, sans pivot, que A n'est pas inversible et déterminer $\mathrm{Im}(f)$.

(2) (a) Calculer A^2, A^3, A^4.
   (b) Déterminer noyau de f et préciser sa dimension.

(3) (a) Montrer que si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u \in \mathbb{R}^4$, avec $u \neq 0$ et $f(u) = \lambda u$, alors $f^4(u) = \lambda^4 u$. En déduire que $\lambda^4 = 0$ puis que $\lambda = 0$.
   (b) Existe-t-il une base de $\mathbb{R}^4$ dans laquelle la matrice de f est diagonale?

(4) On note

$$\varepsilon_1 = e_1, \quad \varepsilon_2 = f(\varepsilon_1), \quad \varepsilon_3 = f(\varepsilon_2), \quad \varepsilon_4 = f(\varepsilon_3)$$

et $\mathcal{C} = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4\}$.

   (a) Montrer que $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
   (b) Déterminer la matrice N de f relativement à la base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^4$.

(5) Existe-t-il un endomorphisme bijectif g de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ tel que $g \circ f \circ g^{-1} = f^2$?

Exercice 2

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle telle que $A^2 = 0$ et $\mathrm{rg}(A) = r$. On note $(u_1, u_2, ..., u_r)$ une base de $\mathrm{Im}(A)$.

(1) Quelle est la dimension de Ker(A)?

(2) Montrer que Im(A) $\subset \mathrm{Ker}(A)$. En déduire que $n \geq 2r$.

(3) En déduire qu'il existe des vecteurs $v_1, v_2, ..., v_{n-2r}$ tels que $(u_1, ..., u_r, v_1, ..., v_{n-2r})$ forme une base de $\mathrm{Ker}(A)$.

(4) Montrer qu'il existe une matrice P inversible telle que

$$A = P \left(\begin{array}{c|c} 0 & I_r \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) P^{-1},$$

où I_r désigne la matrice identité de taille r.

PSI 2022-2023

Khôlles de Mathématiques - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`
Paul Valéry, Paris 12ème.

Planche de khôlles n°3

Semaine du 03/10

Question de cours

Image d'une application linéaire en dimension finie.

Exercice 1

Soient E un espace vectoriel et f un endomorphisme de E vérifiant

$$f^2 + 2f - 3\mathrm{id}_E = 0.$$

(1) Montrer que f est un automorphisme et déterminer f^{-1} en fonction de f.

(2) Montrer que

$$\mathrm{Im}(f + 3\mathrm{id}_E) \subset \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(f - \mathrm{id}_E) \subset \mathrm{Ker}(f + 3\mathrm{id}_E).$$

Justifier que tous ces sous-espaces sont stables sous l'action de f.

(3) Déterminer deux réels α et β tels que

$$\forall x \in E, \qquad x = \alpha(f(x) - x) + \beta(f(x) + 3x).$$

(4) En déduire que $E = \mathrm{Ker}(f + 3\mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$.

Exercice 2

On rappelle que l'application *trace*, notée Tr, est la forme linéaire définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par

$$\forall M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \qquad \mathrm{Tr}(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,i}.$$

(1) Vérifier que, pour toutes matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$. Le but de l'exercice est de montrer que les multiples de la trace sont les seules formes linéaires qui ne différencient pas le produit matriciel.

(2) Soit donc φ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \qquad \varphi(AB) = \varphi(BA).$$