PSI 2022-2023

Khôlles de Mathématiques - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`
Paul Valéry, Paris 12ème.

Planche de khôlles n°1

Semaine du 03/10

Question de cours

Soit $x \in \mathrm{Ker}(f)$. Alors $f(x) = 0$. Il suit que $f^2(x) = f(f(x)) = f(0) = 0$ car f est linéaire. Ainsi, $x \in \mathrm{Ker}(f^2)$ et on a bien l'inclusion $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2)$.

Soit $y \in \mathrm{Im}(f^2)$. Alors, il existe un $x \in E$ tel que $y = f^2(x)$ et en particulier $y = f(f(x)) = f(z)$ avec $z = f(x)$. Ainsi, $y \in \mathrm{Im}(f)$ et on a bien l'inclusion $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$.

Exercice 1

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}^n$. On considère un endomorphisme f de E tel que

$$f^2 = -\mathrm{Id}.$$

(1) (a) Soit $u \in E$, $u \neq 0$. Supposons que u et $f(u)$ soient liés, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(u) = \lambda u$. En appliquant f on obtient

$$-u = f^2(u) = f(f(u)) = f(\lambda u) = \lambda f(u) = \lambda^2 u$$

ou encore $(\lambda^2 + 1)u = 0$ ce qui implique nécessairement que $u = 0$, ce qui est absurde. La famille est donc libre.

(b) Soit $v = au + bf(u)$. Alors, par linéarité de f $f(v) = af(u) + bf^2(u) = -bu + af(u) \in \mathrm{Vect}(u, f(u))$ et le sous-espace est biens table sous l'action de f.

(2) Dans cette question uniquement on considère le cas $n = 2$.

(a) Il est clair qu'une matrice diagonale ne va pas fonctionner. On cherche une matrice la plus simple possible, anticipant un peu en lisant la question d'après, on pense à mettre des 0 sur la diagonale et il vient que l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

convient !

(b) Il se trouve d'ailleurs que dans une base de la forme $(u, f(u))$ (qui en est bien une dès que $u \neq 0$ car d'après la première question la famille est libre et forme donc une base de l'espace en dimension 2), la matrice d'un tel endomorphisme f sera celle ci-dessus.

(3) On revient au cas général. On suppose que $n = 2k$ est pair.

En prenant un vecteur $u_1 \neq 0$, la famille $(u_1, f(u_1))$ est libre par ce qui précède, ce qui initialise la propriété.
Supposons alors construits les vecteurs $(u_1, ..., u_i)$ (pour un certain $i < k$), c'est à dire qu'on a une famille $(u_1, f(u_1), ..., u_i, f(u_i))$ libre. Comme la famille est de cardinal $2i < 2k = n$, il existe un vecteur u_{i+1} non nul tel que

$$u_{i+1} \notin \mathrm{Vect} u_1, f(u_1), ..., u_i, f(u_i)).$$

Il faut donc montrer que

$$f(u_{i+1}) \notin \mathrm{Vect} u_1, f(u_1), ..., u_i, f(u_i)),$$

dès lors que ce sera fait, on peut alors répéter le processus pour construire une base de tout l'espace avec la forme demandée. Observons que dans cette base, la matrice de f est une matrice *diagonale par blocs* dont les blocs sont des répétitions de la matrice 2×2 ci-avant :

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Montrons donc, par l'absurde, que

$$f(u_{i+1}) \notin \mathrm{Vect} u_1, f(u_1), ..., u_i, f(u_i)).$$

Supposons donc qu'on peut écrire

$$f(u_{i+1}) = \sum_{j=1}^{i} \lambda_j u_j + \sum_{j=1}^{i} \mu_j f(u_j) + \alpha u_{i+1} \qquad (*)$$

On applique f (avec $f^2 = -\mathrm{Id}$). On a

$$-u_{i+1} = \sum_{j=1}^{i} \lambda_j f(u_j) - \sum_{j=1}^{i} \mu_j u_j + \alpha f(u_{i+1}) \qquad (**)$$

En injectant la formule pour $f(u_{i+1})$ de $(*)$ dans $(**)$, on obtient

$$u_{i+1} = -\sum_{j=1}^{i} \lambda_j f(u_j) + \sum_{j=1}^{i} \mu_j u_j + \alpha \left(\sum_{j=1}^{i} \lambda_j u_j + \sum_{j=1}^{i} \mu_j f(u_j) + \alpha u_{i+1} \right)$$

ou encore

$$(1+\alpha^2) u_{i+1} = \sum_{j=1}^{i} (-\alpha\mu_j - \lambda_j) f(u_j) + \sum_{j=1}^{i} (\mu_j - \alpha\lambda_j) u_j$$

ce qui donne $u_{i+1} \in \mathrm{Vect} u_1, f(u_1), ..., u_i, f(u_i))$ et fournit la contradiction souhaitée.

Exercice 2

On commence par se placer dans une base dont u et v sont des éléments. On complète avec un vecteur w (par exemple $w = (0, 0, 1)$). Dans cette base il faut que la matrice de l'endomorphisme cherché ait la forme

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

On peut mettre ce qu'on veut sur la troisième colonne excepté une colonne de zéros (sinon l'endomorphisme serait identiquement nul et son noyau de serait pas engendré par (u, v). Prenons alors la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On revient à la base canonique par la formule de changement de base.

$$A = PMP^{-1},$$

où P est la matrice de passage de la base canonique vers la base (u, v, w)

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, la matrice d'un endomorphisme f satisfaisant la condition cherchée, dans la base canonique, pourrait être

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

ce qui donne $f(x, y, z) = (0, 0, -y + z)$.

Planche de khôlles n°2

Semaine du 03/10

Question de cours

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a

$$\begin{aligned} X \in E_1(A) &\iff AX = X \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} 2x - y - 2z &=& x \\ 2x - y - 4z &=& y \\ -x + y + 3z &=& z \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x - y - 2z &=& 0 \\ 2x - 2y - 4z &=& 0 \\ -x + y + 2z &=& 0 \end{array} \right. \\ &\iff x = y + 2z \\ &\iff X = \begin{pmatrix} y + 2z \\ y \\ z \end{pmatrix} = yV + zW, \end{aligned}$$

où on a posé

$$V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Donc $E_1(A) = \mathrm{Vect}(V, W)$ et la famille (V, W) est génératrice de $E_1(A)$. De plus, cette famille est clairement libre car composée de deux vecteurs non colinéaires, elle en forme donc une base.

Avec la même méthode. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a

$$\begin{aligned} X \in E_2(A) &\iff AX = 2X \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} 2x - y - 2z &=& 2x \\ 2x - y - 4z &=& 2y \\ -x + y + 3z &=& 2z \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} -y - 2z &=& 0 \\ 2x - 3y - 4z &=& 0 \\ -x + y + z &=& 0 \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} -x + y + z &=& 0 \\ -y - 2z &=& 0 \\ -y - 2z &=& 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x &=& y + z = -z \\ y &=& -2z \end{array} \right. \\ &\iff X = \begin{pmatrix} -z \\ -2z \\ z \end{pmatrix} = -zU, \end{aligned}$$

où on a posé

$$U = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Donc $E_2(A) = \mathrm{Vect}(U)$. De plus,cette famille est libre car composée d'un seul vecteur non nul et forme donc une base de $E_2(A)$.

En montrant que (U, V, W) forme une famille libre de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on montre que l'intersection de ces deux sous-espaces est réduite au vecteur nul. La dimension de la somme directe est alors égale à la somme des dimensions qui vaut 3 ce qui correspond à l'espace tout entier et il y a donc égalité $E_1(A) \oplus E_2(A) = \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On montre donc que la famille est libre.

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$\begin{aligned} aU + bV + cW = 0 &\iff \begin{pmatrix} a+b+2c \\ 2a+b \\ -a+c \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff \begin{cases} a+b+2c &= 0 \\ 2a+b &= 0 \\ -a+c &= 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a &= 0 \\ b &= -2a \\ c &= a \end{cases} \iff a = b = c = 0 \end{aligned}$$

Donc la famille $\mathcal{B}' = (U, V, W)$ est une famille libre.

Exercice 1

On considère la matrice $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

et l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ de $\mathbb{R}^4$ est A.

(1) Les colonnes de A sont liées : $C_1 + C_2 + C_3 - C_4 = 0$ donc A n'est pas inversible. Par ailleurs, les trois premières colonnes sont libres. En effet,

$$\begin{aligned} \lambda_1 C_1 + \lambda_2 + \lambda_3 C_3 = 0 &\iff \begin{cases} \lambda_1 &= 0 \\ \lambda_1 &= 0 \\ \lambda_2 &= 0 \\ \lambda_3 &= 0 \end{cases} \\ &\iff \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \end{aligned}$$

Par conséquent, comme elles engendrent l'image de f, elles en forment également une base et on peut en déduire la dimension de celle ci: $\dim \mathrm{Im}(f) = 3$ et

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

(2) (a) On a

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et

$$A^4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Pour déterminer le noyau, on résout l'équation $f(u) = 0$:

$$\begin{aligned} u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}(f) & \iff A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 0 \\ & \iff \begin{cases} x - t = 0 \\ x - t = 0 \\ y - t = 0 \\ z - t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \\ & \iff u = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Donc, le vecteur $(1, 1, 1, 1)$ engendre le noyau et en forme donc une base. Le noyau de f est donc de dimension 1 (ce qu'on savait déjà par le théorème du rang).

(3) (a) On a vu ci-dessus que $A^4 = 0$. Or, A^4 est la matrice dans la base canonique de $f^4 = f \circ f \circ f \circ f$. Supposons alors qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u \neq 0$ tels que $f(u) = \lambda u$. En appliquant f quatre fois, on obtient

$$f^4(u) = f^3(f(u)) = f^3(\lambda u) = \lambda f^3(u) = \lambda f^2(f(u)) = \lambda f^2(\lambda u) = ... = \lambda^4 u.$$

Or $f^4 = 0$ donc $f^4(u) = 0$, mais cela donne $\lambda^4 u = 0$. Or $u \neq 0$ donc $\lambda^4 = 0$. La seule solution de cette équation de degré 4 est $\lambda = 0$.

(b) Supposons qu'il existe une matrice diagonale $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ représentant f dans une base $\mathcal{F} = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$. Par définition de la matrice d'une application dans une base, cela voudrait dire que $f(u_1) = \lambda_1 u_1$, $f(u_2) = \lambda_2 u_2$, $f(u_3) = \lambda_3 u_3$ et $f(u_4) = \lambda_4 u_4$. Mais d'après la question précédente, on ne peut alors avoir comme valeur pour chacun des λ_i que 0. Ainsi D est la matrice nulle. Mais la matrice nulle ne peut représenter qu'un endomorphisme nul et f n'est pas nul, donc ce n'est pas possible. *On dit que f n'est pas diagonalisable.*

(4) On note

$$\varepsilon_1 = e_1, \quad \varepsilon_2 = f(\varepsilon_1), \quad \varepsilon_3 = f(\varepsilon_2), \quad \varepsilon_4 = f(\varepsilon_3)$$

et $\mathcal{C} = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4\}$.

(a) Commençons par écrire les composantes des vecteurs ε_i

$$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \varepsilon_3 = f^2(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \varepsilon_4 = f^3(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pour montrer qu'une famille de quatre vecteurs de $\mathbb{R}^4$ en forme une base, il suffit de montrer qu'ils forment une famille libre.

$$\lambda_1\varepsilon_1 + \lambda_2\varepsilon_2 + \lambda_3\varepsilon_3 + \lambda_4\varepsilon_4 = 0 \iff \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 & = & 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 & = & 0 \\ \lambda_3 + \lambda_4 & = & 0 \\ \lambda_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0.$$

et $\mathcal{C}$ forme bien une base de $\mathbb{R}^4$. On aurait aussi pu raisonner sans les composantes en composant la relation de liaison successivement par f^3 (pour ne garder que λ_4 et montrer qu'il est nul), puis par f^2 (pour faire la même chose sur λ_3), puis par f (pour λ_2). Et enfin on aurait eu seulement λ_1 qui se serait retrouvé nul également.

(b) Par définition des vecteurs de $\mathcal{C}$ et comme $f^4 = 0$, on a

$$f(\varepsilon_1) = \varepsilon_2, \ f(\varepsilon_2) = \varepsilon_3, \ f(\varepsilon_3) = \varepsilon_4, \ f(\varepsilon_4) = 0$$

et la matrice de f dans la base $\mathcal{C}$ est alors

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(5) Supposons que ce soit le cas. On aurait alors

$$g \circ f^2 \circ g^{-1} = \left(g \circ f \circ g^{-1}\right)^2 = \left(f^2\right)^2 = f^4 = 0$$

ce qui donnerait,

$$f^2 = g^{-1} \circ 0 \circ g = 0$$

mais ce qui n'est pas le cas. Il n'existe donc pas de tel endomorphisme.

PSI 2022-2023

Khôlles de Mathématiques - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`
Paul Valéry, Paris 12ème.

Planche de khôlles n°3

Semaine du 03/10

Question de cours

Par définition, si $f: E \to F$ une application linéaire, on a

$$\mathrm{Im}(f) = \{y \in F : \exists x \in E,\ y = f(x)\}.$$

En pratique, on décrit l'image de f avec les images par f des vecteurs d'une base (souvent la base canonique) de l'espace de départ. En particulier, si on connait une matrice qui représente f, on regarde l'espace engendré par ses colonnes. Notant $(u_1, ..., u_n)$ une base de E,

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(u_1), ..., f(u_n)).$$

En effet, Si $y \in \mathrm{Im}(f)$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Mais, en décomposant x dans la base $(u_1, ..., u_n)$ on a l'existence de n réels $\lambda_1, .., \lambda_n$ tels que

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$$

par linéarité de f, on a donc

$$y = f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(u_i) \in \mathrm{Vect}(f(u_1), ..., f(u_n))$$

donnant ainsi la première inclusion. Mais, si un élément $y \in \mathrm{Vect}(f(u_1), ..., f(u_n))$, alors il existe n réels $\lambda_1, .., \lambda_n$ tels que

$$y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(u_i) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i\right) \in \mathrm{Im}(f)$$

ce qui donne l'autre inclusion et l'égalité ci-dessus.

Exercice 1

Soient E un espace vectoriel et f un endomorphisme de E vérifiant

$$f^2 + 2f - 3\mathrm{id}_E = 0.$$

(1) La relation ci-dessous se réécrit comme

$$f\,(f + 2\mathrm{id}_E) = 3\mathrm{id}_E$$

ou encore

$$f\left(\frac{1}{3}f - \frac{2}{3}\mathrm{id}_E\right) = \mathrm{id}_E$$

Ainsi, f est bijectif (c'est un automorphisme) et

$$f^{-1} = \frac{1}{3}f - \frac{2}{3}\mathrm{id}_E.$$

(2) La relation de départ se factorise aussi sous la forme

$$(f + 3\mathrm{id}_E)\,(f - \mathrm{id}_E) = 0$$

il est immédiat de montrer les inclusions demandées. On montre seulement la première, l'autre se montre de manière analogue. Soit $y \in \mathrm{Im}(f + 3\mathrm{id}_E)$. Alors, il existe $x \in E$ tel que $y = (f + 3\mathrm{id}_E)(x)$. Mais alors

$$(f - \mathrm{id}_E)(y) = (f - \mathrm{id}_E)(f + 3\mathrm{id}_E)(x) = 0$$

d'après la factorisation ci-dessus. Ainsi, on a bien

$$\mathrm{Im}(f + 3\mathrm{id}_E) \subset \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E).$$

Comme f commute avec $f + 3\mathrm{id}_E$ et avec $f - \mathrm{id}_E$, les stabilités demandées sont immédiates.

(3) On observe que

$$\forall x \in E, \qquad x = -\frac{1}{4}(f(x) - x) + \frac{1}{4}(f(x) + 3x).$$

(4) Comme

$$-\frac{1}{4}(f(x) - x) \in \mathrm{Im}(f - \mathrm{id}_E) \subset \mathrm{Ker}(f + 3\mathrm{id}_E)$$

et

$$\frac{1}{4}(f(x) + 3x) \in \mathrm{Im}(f + 3\mathrm{id}_E) \subset \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E),$$

la décomposition ci-dessus permet de voir que

$$E = \mathrm{Ker}(f + 3\mathrm{id}_E) + \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E).$$

Il reste à voir que la somme est directe et donc que l'intersection des deux sous-espaces est réduite au vecteur nul. Soit alors

$$x \in \mathrm{Ker}(f + 3\mathrm{id}_E) \cap \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$$

Comme $x \in \mathrm{Ker}(f + 3\mathrm{id}_E)$, on a $f(x) = -3x$. Comme on a également $x \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$, on a $f(x) = x$. Ainsi, $x = -3x$ ou encore $4x = 0$ ce qui donne bien $x = 0$ et permet de conclure à la conlusion souhaitée.