PSI 2022-2023

Khôlles de Mathématiques - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`
Paul Valéry, Paris 12ème.

Planche de khôlles n°1

Semaine du 05/12

Question de cours

Pour $x \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = \dfrac{n}{1+n(1+x)}$.

Montrer que $(f_n(x))$ converge simplement sur $[0; +\infty[$ vers une fonction f à déterminer. Montrer que la convergence sur ce même intervalle est uniforme.

Exercice 1

Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ la suite de fonction définie sur $[0;1]$ par $f_n(x) = \dfrac{2^n x}{1+2^n n x^2}$.

(1) Montrer que (f_n) converge simplement sur $[0;1]$ vers une fonction f à déterminer.
(2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer puis déterminer un équivalent lorsque $n \to +\infty$ (de) l'intégrale

$$I_n = \int_0^1 f_n(t)\mathrm{d}t.$$

(3) La convergence de (f_n) vers f sur $[0;1]$ est-elle uniforme?

Exercice 2

On considère $E = \mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire

$$\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t.$$

(1) Déterminer une base orthonormée du sous-espace $\mathbb{R}_1[X]$ pour ce produit scalaire.
(2) Calculer $\displaystyle\inf_{a,b\in\mathbb{R}} \int_0^1 (t^2 - at - b)^2 \mathrm{d}t$.

PSI 2022-2023

Khôlles de Mathématiques - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`
Paul Valéry, Paris 12ème.

Planche de khôlles n°2

Semaine du 05/12

Question de cours

Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique, déterminer la distance de $u = (3, 4, 5)$ au plan P d'équation $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ 2x + y - z = 0\}$.

Exercice 1

On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ définie sur $[0; 1]$ par $f_n(x) = \dfrac{x}{1 + n^2x^2}$.

(1) Montrer que (f_n) converge simplement puis uniformément sur $[0; 1]$ vers une fonction f à déterminer.
(2) Justifier que f_n est dérivable sur $[0; 1]$ et que la suite de fonctions $(f'_n)_{n\geq 1}$ converge simplement sur $[0; 1]$ vers une fonction g.
(3) Vérifier que $f \neq g$. Quel est alors l'intérêt de cet exercice ?

Exercice 2

Soient E un espace euclidien et p un projecteur de E. On cherche à montrer que

$$p \text{ est un projecteur orthogonal} \iff (\forall x \in E, \quad ||p(x)|| \leq ||x||)\,.$$

(1) Montrer le sens $\Rightarrow$.
(2) On suppose que, pour tout $x \in E$, on a $||p(x)|| \leq ||x||$.
   (a) Soient $x \in \mathrm{Im}(p)$ et $y \in \mathrm{Ker}(p)$. Montrer que l'application $t \in \mathbb{R} \mapsto ||x + ty||^2$ est dérivable et qu'elle est minimale en 0.
   (b) Conclure.

Planche de khôlles n°3

Semaine du 05/12

Question de cours

Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique, orthonormaliser, par le procédé de Schmidt, la base

$$u = (1, 0, 1), \quad v = (1, 1, 1), \quad w = (-1, -1, 0).$$

Exercice 1

Dans tous les exercice, on considère $a_0, a_1, ...a_n$ des réels **distincts**. On introduit, pour $P, Q \in E = \mathbb{R}_n[X]$ l'application φ définie sur $E \times E$ par

$$\varphi(P, Q) = \sum_{i=1}^{n} P(a_i)Q(a_i)$$

(1) Montrer que φ définit un produit scalaire sur E.

(2) On introduit la famille $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ définie par

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \qquad P_k(X) = \prod_{j \in [\![0,n]\!] \setminus \{k\}} (X - a_j).$$

(a) Vérifier que (P_k) est une famille orthogonale.

(b) Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, déterminer $||P_k||$.

(c) On considère le sous-espace

$$H = \{P \in E : \sum_{k=0}^{n} P(a_k) = 0\}$$

(i) Montrer que H est un hyperplan de E.

(ii) Déterminer une base (R) de $H^{\perp}$.

(iii) Soit $Q \in E$. Exprimer la distance de Q à H.

Exercice 2

Soit (f_n) la suite de fonctions définie sur $[0; 1]$ par, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = \begin{cases} n^2x(1 - nx), & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$

(1) Montrer que (f_n) converge simplement sur $[0; 1]$ vers une fonction f à préciser.

(2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)\mathrm{d}t$.

(3) La convergence de (f_n) vers f est-elle uniforme sur $[0; 1]$?