PSI 2022-2023

Khôlles de Mathématiques - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`
Paul Valéry, Paris 12ème.

Planche de khôlles n°1

Semaine du 07/11

Question de cours

Déterminer la nature de l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{1/x}-1}{\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}\mathrm{d}x.$$

Exercice 1

Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, on définit sur $\mathbb{R}$, la fonction f_n par

$$f_n(x) = x^n \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

(1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale I_n est convergente, où

$$I_n = \int_0^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t.$$

(2) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_{n+2} = (n+1)I_n.$$

(3) Calculer I_1.

(4) Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$I_{2n} = \frac{(2n)!}{2^n n!} I_0, \quad \text{et} \quad I_{2n+1} = 2^n n!$$

Exercice 2

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A_1, A_2, ..., A_n$ des évènements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Montrer, par récurrence sur n (et à l'aide de la formule du crible) que

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) \geq \sum_{k=1}^{n} P(A_k) - (n-1).$$

Exercice 3

Vous êtes dans une classe de 24 élèves. Votre prof de maths veut parier avec vous 10 euros que deux personnes dans cette classe ont la même date d'anniversaire. Acceptez-vous le pari?

Khôlles de Mathématiques - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`
Paul Valéry, Paris 12ème.

Planche de khôlles n°2

Semaine du 07/11

Question de cours

Déterminer la nature des intégrales suivantes

$$(i) \int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t-1}\mathrm{d}t, \qquad (ii) \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x+e^x}\mathrm{d}x, \qquad (iii) \int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{t^2}{2t+1}}\mathrm{d}t, \qquad (iv) \int_0^{1} \frac{\ln(x)}{1-x^2}\mathrm{d}x.$$

Exercice 1

José regarde la télévision et zappe aléatoirement entre trois programmes (*Télé-Achat*, *Danse avec les stars* et *Le plus grand cabaret du monde*) de la façon suivante:

- À l'instant $n=0$, il regarde une démonstration d'un épluche-légume MP3 qui fait aussi le café présenté au *Télé-Achat*;
- Si à l'instant n, il regarde un programme quelconque, il continue à le regarder à l'instant $n+1$ avec probabilité $2/3$ ou zappe vers l'un des deux autres programmes avec la même probabilité.

On note A_n (resp. B_n, C_n) l'évènement "José regarde le *Télé-Achat* à l'instant n" (resp. *Danse avec les stars*, *Le plus grand cabaret du monde*) et a_n, b_n, c_n les probabilités correspondantes.

(1) Que vaut $a_n+b_n+c_n$?
(2) Exprimer a_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
(3) Même question pour b_{n+1} et c_{n+1}.
(4) Montrer que

$$a_{n+1}-b_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n-b_n) \qquad \text{et} \qquad a_{n+1}-c_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n-c_n).$$

(5) En déduire l'expression des termes généraux des trois suites en fonction de n.

Exercice 2

Un voyageur prend l'avion. À chaque voyage, la probabilité que sa valise soit retardée est de $1/12$ et les incidents de bagages sont indépendants à chaque vol. En introduisant les évènements A_n correspondant à "le voyageur ne subit pas de retard de bagage au cours des n premiers vols", montrer à l'aide du résultat de la limite monotone que, presque sûrement, ce voyageur subira un retard de valise lors d'une répétition infinie de trajets en avion.

Planche de khôlles n°3

Semaine du 07/11

Question de cours

Montrer la convergence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(\ln(1+x))^n}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$.

Exercice 1

Pour tout couple (p,q) d'entiers naturels, on pose

$$I(p,q) = \int_0^1 x^p (1-x)^q \, \mathrm{d}x.$$

(1) Montrer que , pour tout couple $(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$$I(p,q) = \frac{q}{p+1} I(p+1, q-1).$$

(2) En déduire que, pour tout couple $(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$$I(p,q) = \frac{p!q!}{(p+q)!} I(p+q, 0).$$

(3) Déterminer$I(p+q,0)$ et montrer finalement que

$$I(p,q) = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}.$$

Exercice 2

On tire au hasard un nombre entier strictement positif. On suppose que la probabilité d'obtenir n vaut $1/2^n$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note A_k l'évènement "n est un multiple de k".

(1) Vérifier que $P : n \mapsto P(\text{"on obtient } n\text{"})$ est une probabilité sur $\mathbb{N}$.
(2) Calculer $P(A_k)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.
(3) Calculer ensuite $P(A_2 \cup A_3)$
(4) Montrer que pour $p, q \geq 2$, A_p et A_q ne sont pas indépendants. (*On pourra raisonner par l'absurde et introduire* $m = \mathrm{ppcm}(p,q)$.)

Exercice 3

Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire. On effectue une série de tirages aléatoires d'une boule jusqu'à obtenir une boule noire. A chaque tirage amenant une boule blanche, on replace la boule blanche puis on multiplie par 2 le nombre de boules blanches présentes dans l'urne après la remise de la boule, puis on procède au tirage suivant. L'objectif de l'exercice est d'évaluer la probabilité de ne jamais obtenir de boule noire, et de déterminer en particulier si cette probabilité est nulle.

(1) **Étude pour un nombre fini de tirages.** Pour $n \geq 1$, on note B_n ”événement : "Les n premiers tirages ont lieu et n"amènent pas de boules noires". On note $u_n = P(B_n)$.

  (a) Montrer que la suite (u_n) est convergente.
  (b) Montrer que
  $$u_n = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2^k}{1+2^k}$$

(2) **Étude à l'infini.** On note B_∞ l'évènement "l'expérience ne s'arrête jamais".

  (a) Montrer que $P(B_\infty) = \lim_{n\to+\infty} u_n$.
  (b) Montrer que $-\ln(u_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \ln(1+2^{-k})$.
  (c) Conclure que $P(B_\infty) > 0$.