PSI 2022-2023

Khôlles de Mathématiques - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`
Paul Valéry, Paris 12ème.

Planche de khôlles n°1

Semaine du 07/11

Question de cours

Comme $1/x \to 0, x \to +\infty$, on a $e^{1/x} - 1 \sim 1/x,\ x \to +\infty$.
De même, comme $1/\sqrt{x} \to 0$, on a $\ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \sim 1/\sqrt{x}$. Bilan :

$$\frac{e^{1/x} - 1}{\ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad x \to +\infty$$

et, par critère de Riemann, l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$$

diverge. Il en va de même pour l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{1/x} - 1}{\ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)} \mathrm{d}x.$$

Exercice 1

Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, on définit sur $\mathbb{R}$, la fonction f_n par

$$f_n(x) = x^n \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

(1) (a) L'intégrale est impropre en $+\infty$; sur $[0;1]$, f_n est continue et l'intégrale existe. Par croissance comparée, on a

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 f_n(x) = \lim_{x\to+\infty} x^{n+2} e^{-x^2+2} = 0$$

ou encore que,

$$f_n(x) = o\left(\frac{1}{x^2}\right), \qquad x \to +\infty.$$

Comme, par le critère de Riemann, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ converge et que la fonction f_n est positive, le critère de comparaison par négligeabilité permet d'affirmer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x$ est également convergente. Au final, on a bien la convergence de l'intégrale considérée. On pose alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \int_0^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t.$$

(2) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $A > 0$. On va procéder par intégration par parties, et ce manière un peu astucieuse dans le "découpage" de la fonction dans l'intégrale. En effet, posons

$$\left\{\begin{array}{lcl} u' & = & xe^{-x^2/2} \\ v & = & x^{n+1} \end{array}\right. \rightsquigarrow \left\{\begin{array}{lcl} u & = & -e^{-x^2/2} \\ v & = & (n+1)x^n \end{array}\right.$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; A]$ rendant l'intégration par parties licite et permettant d'écrire

$$\begin{array}{lcl} \displaystyle\int_0^A x^{n+2}e^{-x^2/2}\mathrm{d}x & = & \left[-x^{n+1}e^{-x^2/2}\right]_0^A + (n+1)\displaystyle\int_0^A x^n e^{-x^2/2}\mathrm{d}x \\ & = & -A^{n+1}e^{-A^2/2} + (n+1)\displaystyle\int_0^A f_n(x)\mathrm{d}x \\ & \underset{A+\to+\infty}{\longrightarrow} & (n+1)I_{n-2} \end{array}$$

par croissance comparée et car $\int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x$ converge. Au final, on a bien

$$I_{n+2} = (n+1)I_n.$$

(3) Soit $A > 0$.

$$\begin{array}{lcl} \displaystyle\int_0^A xe^{-x^2/2}\mathrm{d}x & = & \left[-e^{x^2}/2\right]_0^A \\ & = & -e^{-A^2/2} + 1 \\ & \underset{A+\to+\infty}{\longrightarrow} & 1. \end{array}$$

Ainsi, on a $I_1 = 1$.

(4) Montrons les formules demandées par récurrences.

- Initialisation. Pour $n = 0$, on a

$$I_0 = \frac{(0)!}{2^0 0!} I_0$$

car $0! = 1$.On a également

$$I_1 = 1 = 2^0 0!.$$

Donc les formules sont vraies pour $n = 0$.

- Hérédité. Supposons les deux formules vérifiées pour un certain $n \in \mathbb{N}$. D'une part

$$\begin{array}{lcl} I_{2(n+1)} & = & I_{2n+2} = (n+1)I_n \\ & = & (2n+1)I_0 \dfrac{(2n)!}{2^n n!} \qquad \text{(par HR)} \\ & = & \dfrac{(2n+2)(2n+1)}{(2n+2)} I_0 \dfrac{(2n)!}{2^n n!} \\ & = & \dfrac{(2n+2)!}{2(n+1)2^n n!} I_0 \\ & = & \dfrac{(2(n+1)!}{2^{n+1}(n+1)!} I_0 \end{array}$$

ce qui est bien la première formule au rang $n+1$. D'autre part,

$$\begin{array}{lcl} I_{2(n+1)+1} & = & I_{2n+3} = (2n+2)I_{2n+1} \\ & = & (2n+2)2^n n! = 2(n+1)2^n n! \\ & = & 2^{n+1}(n+1)! \end{array}$$

et on a encore l'autre formule au rang $n+1$, ce qui termine la récurrence.

Exercice 2

On procède comme demandé par récurrence :

- initialisation. Pour $n = 1$, il n'y a rien à montrer. On va vérifier quand même pour $n = 2$.
$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cup A_2) \geq P(A_1) + P(A_2) - 1.$$
- hérédité. Supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, on ait
$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) \geq \sum_{k=1}^{n} P(A_k) - (n-1).$$
Alors, en commençant par appliquer la propriété pour deux évènements
$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \cap A_{n+1}) &= P([A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n] \cap A_{n+1}) \\ &\geq P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) + P(A_{n+1} - 1 \\ &\geq \sum_{k=1}^{n} P(A_k) - (n-1) - 1 \qquad \text{(par HR)} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} P(A_k) - n \end{aligned}$$
ce qui est bien la propriété au rang $n + 1$ et termine la récurrence.

Exercice 3

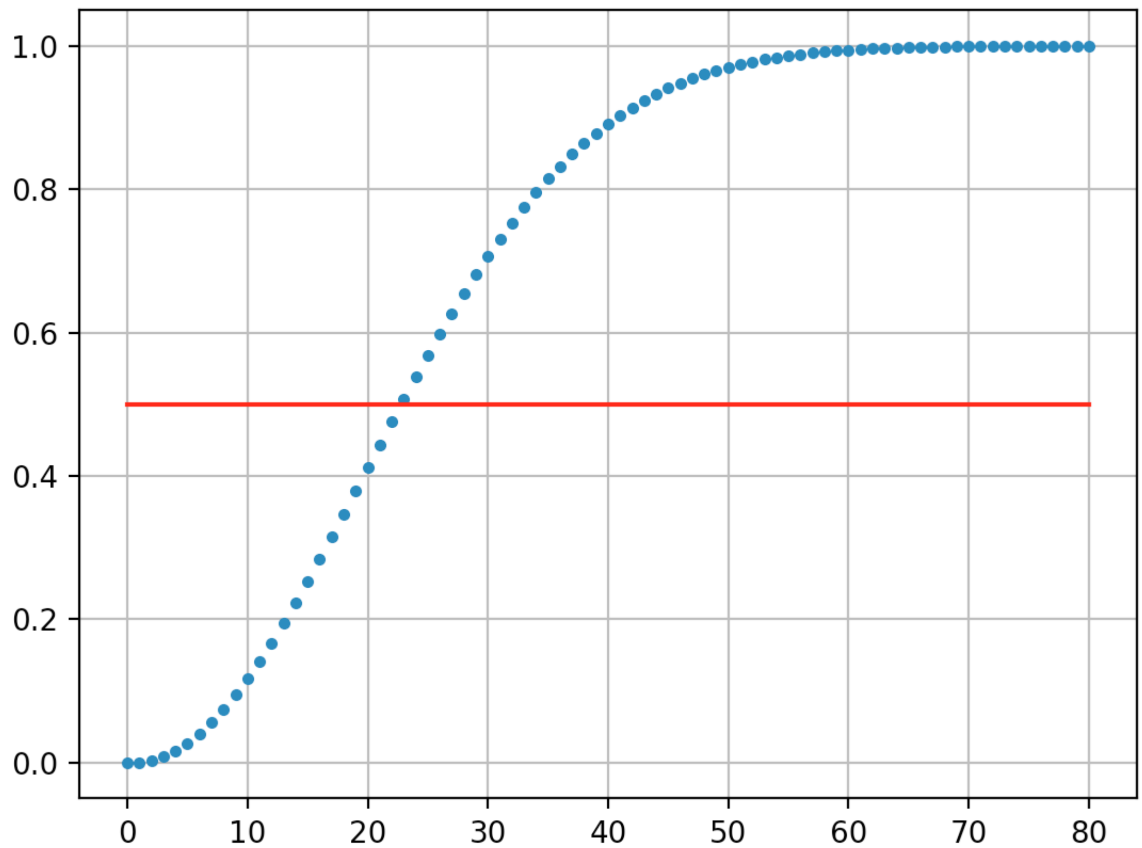
On raisonne en passant par le complémentaire pour un groupe de n personnes. En notant A "au moins deux personnes ont la même date d'anniversaires", on a $\overline{A}$ "tout le monde a une date d'anniversaire différente". Il faut donc compter le nombre de listes ordonnées de n éléments avec une date (parmi 365) différente à chaque composante. Il y en a
$$365 \times 364 \times ... \times 365 - (n-1)$$
Comme on a 365^n façons de choisir un $n-$uplet de dates, on obtient
$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \prod_{k=0}^{n} \left(1 - \frac{k}{365}\right).$$
On peut facilement représenter graphiquement la fonction
$$n \longmapsto 1 - \prod_{k=0}^{n} \left(1 - \frac{k}{365}\right)$$
avec Python.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def proba_annif(n) :
    a=1
    for k in range(n):
        a=a*(1-k/365)
    return 1-a

stop=81
N=[k for k in range(stop)]
Y=[proba_annif(k) for k in N]
plt.grid()
```

```
plt.plot(N, Y, '.')
plt.plot(N, [0.5 for k in N], 'red')
plt.show()
```

ce qui donne la figure

Affichage Python



On peut voir notamment que la probabilité est supérieure à $1/2$ dès que $n \geq 23$. Il vaut mieux refuser le pari...

Planche de khôlles n°2

Semaine du 07/11

Exercice 1

Commençons par traduire les informations du texte:

- À l'instant $n = 0$, José regarde le *Télé-Achat*, ce qui veut dire que
$$a_0 = 1, b_0 = 0 \quad \text{et} \quad c_0 = 0.$$
- Si à l'instant n, il regarde l'un des trois programmes, il continue à le regarder à l'instant $n+1$ avec probabilité $2/3$ ou zappe vers l'un des deux autres programmes avec la même probabilité. En particulier, on traduit cela comme
$$P_{A_n}(A_{n+1}) = P_{B_n}(B_{n+1}) = P_{C_n}(C_{n+1}) = \frac{2}{3}$$
et
$$P_{A_n}(B_{n+1}) = P_{A_n}(C_{n+1}) = P_{B_n}(A_{n+1}) = P_{B_n}(C_{n+1}) = P_{C_n}(A_{n+1}) = P_{C_n}(B_{n+1}) = \frac{1}{6}.$$

(1) Il est clair qu'au moment n, il regarde l'un des trois programmes mais ne peut pas en regarder deux simultanément, ainsi $\{A_n, B_n, C_n\}$ forme un système complet d'évènements et par conséquent $a_n + b_n + c_n = 1$.

(2) Par la formule des probabilités totales et les données du texte
$$\begin{aligned} a_{n+1} &= P(A_{n+1}) = P_{A_n}(A_{n+1})P(A_n) + P_{B_n}(A_{n+1})P(B_n) + P_{C_n}(A_{n+1})P(C_n) \\ &= \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{6}b_n + \frac{1}{6}c_n \end{aligned}$$

(3) De manière totalement analogue,
$$\begin{aligned} b_{n+1} &= P(B_{n+1}) = P_{A_n}(B_{n+1})P(A_n) + P_{B_n}(B_{n+1})P(B_n) + P_{C_n}(B_{n+1})P(C_n) \\ &= \frac{1}{6}a_n + \frac{2}{3}b_n + \frac{1}{6}c_n \end{aligned}$$
et
$$\begin{aligned} c_{n+1} &= P(C_{n+1}) = P_{A_n}(C_{n+1})P(A_n) + P_{B_n}(C_{n+1})P(B_n) + P_{C_n}(C_{n+1})P(C_n) \\ &= \frac{1}{6}a_n + \frac{1}{6}b_n + \frac{2}{3}c_n. \end{aligned}$$

(4) On voit alors, facilement d'après les relations précédentes, que

$$\begin{aligned} a_{n+1} - b_{n+1} &= \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{6}b_n + \frac{1}{6}c_n - (\frac{1}{6}a_n + \frac{2}{3}b_n + \frac{1}{6}c_n) \\ &= \frac{1}{2}a_n - \frac{1}{2}b_n \\ &= \frac{1}{2}(a_n - b_n) \end{aligned}$$

Ainsi, la suite $(a_n - b_n)$ est géométrique de raison $1/2$ et on peut écrire

$$a_n - b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (a_0 - b_0) = \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

L'autre égalité se montre vraiment de la même manière, si bien qu'on omet le détail ici. Tout cela nous conduit à

$$a_n - c_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (a_0 - c_0) = \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

(5) En récapitulant et à l'aide d'une résolution de système (dont a_n, b_n et c_n sont les inconnues) on a

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a_n + b_n + c_n &=& 1 \\ a_n - b_n &=& \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ a_n - c_n &=& \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{lcl} a_n &=& \frac{1}{3}\left(1 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \\ b_n &=& \frac{1}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \\ c_n &=& \frac{1}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \end{array} \right.$$

Exercice 2

En notant A l'évènement "on ne subit jamais de retard bagage", on cherche à montrer que $P(A) = 0$. Or, A peut s'écrire à l'aide des B_n "on n'a pas subi de retard lors des n premiers voyages" :

$$A = \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n.$$

On constate d'ailleurs que la suite d'évènements (A_n) est décroissante (au sens de l'inclusion). Si on a pas subi de retard lors des $n+1$ premiers voyages, c'était aussi le cas lors de n premiers. Par limite monotone,

$$P(A) = \lim_{n \to +\infty} P(A_n).$$

Comme, à chaque voyage, La probabilité d'être à d'un incident est est $1/12$, $P(1_n) = (11/12)^n$. Il suit que

$$P(1) = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{11}{12}\right)^n = 0,$$

car $0 < 11/12 < 1$. On a bien le résultat attendu c'est à dire que le complémentaire correspondant à "on subira à un moment un retard bagage" est de probabilité 1.

PSI 2022-2023

Khôlles de Mathématiques - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`
Paul Valéry, Paris 12ème.

Planche de khôlles n°3

Semaine du 07/11

Question de cours

On montre facilement par croissance comparée que
$$\frac{(\ln(1+x))^n}{(1+x)^2} = o\left(\frac{1}{(1+x)^{3/2}}\right)$$
puis on utilise une comparaison par négligeabilité à une intégrale de Riemann convergente. Easy.

Exercice 1

Pour tout couple (p,q) d'entiers naturels, on pose
$$I\,(p,q) = \int_0^1 x^p\,(1-x)^q\,\mathrm{d}x.$$

(1) C'est une intégration par parties. Les deux fonctions sous l'intégrale étant $\mathcal{C}^1$ sur $[0;.1]$, elle est parfaitement légale et on a
$$\begin{aligned} I(p,q) &= \int_0^1 x^p\,(1-x)^q\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{x^{p+1}}{p+1}(1-x)^q\right] + \frac{q}{p+1}\int_0^1 x^{p+1}(1-q)^{q-1}\mathrm{d}x \\ &= \frac{q}{p+1}I(p+1,q-1). \end{aligned}$$

(2) . On montre, par récurrence sur $q\in\mathbb{N}$ que, pour tout $p\in\mathbb{N}$, la formule est vraie:

- initialisation: pour $q=0$, on a, pour tout $p\in\mathbb{N}$,
$$I(p,0) = \frac{p!0!}{(p+0)!}I(p+0,0)$$
car $0!=1$.
- hérédité: supposons que, pour un certain $q\in\mathbb{N}$, on ait la formule vérifiée pour tout $p\in\mathbb{N}$. (HR). Alors;
$$\begin{aligned} I(p,q+1) &= \frac{q+1}{p+1}I(p+1,q+1-1) = \frac{q+1}{p+1}I(p+1,q) \\ &= \frac{q+1}{p+1}\frac{(p+1)!q!}{(p+1+q)!}I(p+q+1,0) \qquad \text{(par HR)} \\ &= \frac{p!(q+1)!}{(p+q+1)!}I(p+q+1,0), \end{aligned}$$

ce qui termine bien la récurrence.

(3) Le calcul est facile

$$I(p+q,0) = \int_0^1 x^{p+q}\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{p+q+1}}{(p+q+1)}\right]_0^1 = \frac{1}{p+q+1}$$

et il découle de la question précédente que

$$I\left(p,q\right) = \frac{p!q!}{(p+q)!} \times \frac{1}{p+q+1} = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}.$$