PSI 2022-2023

Khôlles de Mathématiques - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`
Paul Valéry, Paris 12ème.

Planche de khôlles n°1

Semaine du 10/10

Question de cours

Soit f une application linéaire sur un espace vectoriel E. Montrer que

$$\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f).$$

Exercice 1

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère un vecteur v **fixé** de $\mathbb{R}^3$.
On considère également l'application f qui à tout vecteur $u = (a, b, c)$ de $\mathbb{R}^3$ associe le vecteur $f(u)$ définie par :

$$f(u) = u - (a + b + c)v$$

(1) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

(2) **Étude d'un cas particulier.** Dans cette question seulement, on suppose que $v = (2, -1, 0)$.
- (a) Vérifier que $f(v) = 0$. f est-il un automorphisme ?
- (b) Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$.
- (c) On note $w = (-1, 1, 0)$ et $z = (0, -1, 1)$. Montrer que la famille (w, z) est également une base de $\mathrm{Im}(f)$.
- (d) En déduire, sans calculs supplémentaires, une base de $\ker(f)$.
- (e) Montrer que la famille $\mathcal{C} = (v, w, z)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
- (f) Déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ puis dans la base $\mathcal{C}$.

(3) **Retour au cas général.** On suppose maintenant que $v = (\alpha, \beta, \gamma)$ vérifie $\alpha + \beta + \gamma = 1$.
- (a) Montrer que $f(v) = 0$.
- (b) En déduire que $f \circ f = f$.
- (c) Montrer que le vecteur y appartient à $\mathrm{Im}(f)$ **si et seulement si** $f(y) = y$.
- (d) En déduire que les vecteurs $e_2 - e_1$ et $e_3 - e_2$ appartiennent à $\mathrm{Im}(f)$.
- (e) Déduire de la question 3a que $\mathrm{rg}(f) \leq 2$.
- (f) Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$.
- (g) Déterminer, en fonction de (α, β, γ) la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Cette matrice est-elle inversible ?
- (h) Montrer que la famille $\mathcal{C} = (v, e_2 - e_1, e_3 - e_2)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ puis déterminer la matrice de f dans cette base.

PSI 2022-2023

Khôlles de Mathématiques - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`
Paul Valéry, Paris 12ème.

Planche de khôlles n°2

Semaine du 10/10

Question de cours

Calculer les intégrales suivantes

$$(i)\ \int_2^4 \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)}, \qquad (ii)\ \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{2t^2+1}, \qquad (iii)\ \int_0^2 3^t \mathrm{d}t$$

Exercice 1

On considère un hyperplan H de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $(A_1, ..., A_p)$ une base de H et I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Le but est de montrer que H contient au moins une matrice inversible.

☞ *On suppose donc que H ne contient aucune matrice inversible.*

(1) Montrer que $H \oplus \mathbb{R}I_n = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(2) Soit N une matrice nilpotente, c'est à dire pour laquelle il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $N^{k-1} \neq 0$ et $N^k = 0$.

  (a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $N - \lambda I$ non inversible.
    (i) Justifier qu'il existe $u \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $u \neq 0$ et $Nu = \lambda u$.
    (ii) Montrer que $\lambda^k = 0$. Conclure quant à la valeur de λ.
  (b) Montrer qu'il existe une matrice $B \in H$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $N = B + \lambda I$ puis que $\lambda = 0$.
  (c) En déduire que H contient toutes les matrices nilpotentes.

(3) Déterminer une matrice inversible qui s'écrive comme somme de deux matrices nilpotentes. Conclure.

Exercice 2

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle telle que $A^2 = 0$ et $\mathrm{rg}(A) = r$. On note $(u_1, u_2, ..., u_r)$ une base de $\mathrm{Im}(A)$.

(1) Quelle est la dimension de Ker(A)?
(2) Montrer que $\mathrm{Im(A)} \subset \mathrm{Ker}(A)$. En déduire que $n \geq 2r$.
(3) En déduire qu'il existe des vecteurs $v_1, v_2, ..., v_{n-2r}$ tels que $(u_1, ..., u_r, v_1, ..., v_{n-2r})$ forme une base de $\mathrm{Ker}(A)$.
(4) Montrer qu'il existe une matrice P inversible telle que

$$A = P \left(\begin{array}{c|c} 0 & I_r \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) P^{-1},$$

où I_r désigne la matrice identité de taille r.

PSI 2022-2023

Khôlles de Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
Paul Valéry, Paris 12ème.

Planche de khôlles n°3

Semaine du 10/10

Question de cours

Caractérisation de l'injectivité d'une application linéaire. Énoncé et démonstration.

Exercice 1

On considère l'application φ qui, à toute polynôme P de $\mathbb{R}_2[X]$, associe le polynôme, notée $\varphi(P)$, définie par:

$$(\varphi(P))(X) = \int_0^1 P(X+t)\mathrm{d}t$$

(1) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

(2) (a) Écrire la matrice A de φ dans la base canonique.
(b) Montrer que φ est un automorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$. Que peut-on dire de son noyau?

(3) (a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, il existe un réel u_n tel que l'on ait :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{n}{2} & u_n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donner u_0 et établir que : $\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{6}(3n+2).$
(b) En déduire, par sommation, l'expression de u_n pour tout entier n.
(c) Écrire A^n sous forme de tableau matriciel.

Exercice 2

On rappelle que l'application *trace*, notée Tr, est la forme linéaire définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par

$$\forall M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \qquad \mathrm{Tr}(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,i}.$$

(1) Vérifier que, pour toutes matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

(2) Soit donc φ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \qquad \varphi(AB) = \varphi(BA).$$

Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\varphi = \lambda \mathrm{Tr}$.