PSI 2022-2023

Khôlles de Mathématiques - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`
Paul Valéry, Paris 12ème.

Planche de khôlles n°1

Semaine du 14/11

Question de cours

Énoncé de la limite monotone.
Application. Le professeur de math, Monsieur J. arrive chaque matin en retard avec une probabilité de 1/100. Montrer que, presque sûrement, il arrivera en retard au cours de carrière (supposée de durée infinie).

Exercice 1

On lance indéfiniment une pièce donnant *Pile* avec la probabilité p et *Face* avec la probabilité $q = 1 - p$. On suppose que $p \in]0, 1[$ et on admet que les lancers sont mutuellement indépendants.

Pour tout entier naturel k, supérieur ou égal à 2, on dit que le $k^{ième}$ lancer est un changement s'il amène un résultat différent de celui du $(k-1)^{ième}$ lancer.

On note P_k (resp. F_k) l'événement : "on obtient *Pile* (resp. *Face*) au $k^{ième}$ lancer".
Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de changements survenus durant les n premiers lancers.

(1) Déterminer la loi de X_2.
(2) Déterminer la loi de X_3.
(3) Déterminer la loi de X_4.
(4) Montrer que dans le cas particulier $p = q = 1/2$, X_n suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres. Vérifier que c'est cohérent avec les résultats précédents.

Exercice 2

On tire au hasard un nombre entier strictement positif. On suppose que la probabilité d'obtenir n vaut $1/2^n$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note A_k l'évènement "n est un multiple de k".

(1) Vérifier que $P : n \mapsto P(\text{"on obtient } n\text{"})$ est une probabilité sur $\mathbb{N}$.
(2) Calculer $P(A_k)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.
(3) Calculer ensuite $P(A_2 \cup A_3)$
(4) Montrer que pour $p, q \geq 2$, A_p et A_q ne sont pas indépendants. (*On pourra raisonner par l'absurde et introduire* $m = \text{ppcm}(p, q)$.)

PSI 2022-2023

Khôlles de Mathématiques - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`
Paul Valéry, Paris 12ème.

Planche de khôlles n°2

Semaine du 14/11

Question de cours

Formule des probabilités composées.
Application. Une urne contient initialement $N-1$ boules blanches et une boule noire. On pioche successivement dans cette urne les boules, sans remise, jusqu'à obtention de la boule noire. On note X la v.a. correspondant au nombre de pioches nécessaires. Déterminer la loi de X.

Exercice 1

Une urne contient des boules numérotées de 1 à n. On tire successivement, avec remise, deux boules de l'urne et on note X la v.a. correspondant au plus petit des numéros obtenus.

(1) Déterminer la loi de X.
(2) Dans la même urne, on effectue maintenant n tirages, avec remise et on note, pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, N_k la v.a. correspondant au nombre de fois où on a tiré la boule numérotée k.
  (a) Quelle est la loi de N_k?
  (b) Soit i, j deux entiers distincts de $[\![1;n]\!]$. Quelle est la loi de $N_i + N_j$?

Exercice 2

Un binôme de deux personnes nommées A et B participent à une épreuve physique. Ces deux personnes doivent grimper une corde. Une fois que l'une des deux personnes a réussi, elle doit attendre que l'autre personne en fasse de même. On suppose que :

- A et B disposent chacun de leur propre corde.
- A et B ont droit à autant d'essais qu'ils le souhaitent.
- Les essais sont indépendants.
- Chaque essai, qu'il soit réussi ou non, dure une minute et est réussi avec probabilité p.

On note X_1 (resp. X_2) le nombre d'essais nécessaires à A (resp. B) pour grimper la corde, et Y la variable aléatoire réelle égale à $|X_1 - X_2|$.

(1) Déterminer la lois de X_1 (et de même celle de X_2). On pourra introduire les évènements "A_k "A réussit sa $k-$ième tentative.
(2) Que représente l'événement $[Y = 0]$? Déterminer sa probabilité.
(3) Montrer que pour tout on a, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$P(Y = k) = \frac{2p(1-p)^k}{2-p}.$$

PSI 2022-2023

Khôlles de Mathématiques - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`
Paul Valéry, Paris 12ème.

Planche de khôlles n°3

Semaine du 14/11

Question de cours

Formule des probabilités totales. Énoncé et démonstration.
Un exemple. On dispose de n urnes, numérotées de 1 à n. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, l'urne k contient k boules numérotées de 1 à k. On choisit une urne au hasard puis on pioche dans cette urne. On note X la v.a. correspondant au numéro de la boule piochée. Déterminer la loi de X.

Exercice 1

Mr Black et Mr White s'affrontent en duel. Mr Black réussit son tir 2 fois sur 3 alors que Mr White seulement 1 fois sur 3. Gentleman, il laisse Mr White commencer la série de tirs. A chaque échec d'un tireur, c'est au tour de son adversaire de tirer et ils répètent le processus jusqu'à ce que mort s'en suive. Montrer que presque sûrement l'un des deux s'écroule et calculer la probabilité de victoire de chacun.

Exercice 2

Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire. On effectue une série de tirages aléatoires d'une boule jusqu'à obtenir une boule noire. A chaque tirage amenant une boule blanche, on replace la boule blanche puis on multiplie par 2 le nombre de boules blanches présentes dans l'urne après la remise de la boule, puis on procède au tirage suivant. L'objectif de l'exercice est d'évaluer la probabilité de ne jamais obtenir de boule noire, et de déterminer en particulier si cette probabilité est nulle.

(1) **Étude pour un nombre fini de tirages.** Pour $n \geq 1$, on note B_n ”événement : "Les n premiers tirages ont lieu et n"amènent pas de boules noires". On note $u_n = P(B_n)$.

  (a) Montrer que la suite (u_n) est convergente.
  (b) Montrer que
$$u_n = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2^k}{1+2^k}$$

(2) **Étude à l'infini.** On note B_∞ l'évènement "l'expérience ne s'arrête jamais".

  (a) Montrer que $P(B_\infty) = \lim_{n \to +\infty} u_n$.
  (b) Montrer que $-\ln(u_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \ln(1 + 2^-k)$. Conclure que $P(B_\infty) > 0$.