PSI 2022-2023

Khôlles de Mathématiques - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`
Paul Valéry, Paris 12ème.

Planche de khôlles n°1

Semaine du 14/11

Question de cours

Soient (A_n) une suite d'évènement croissante (au sens de l'inclusion) et (B_n) une suite d'évènements décroissante (au sens de l'inclusion). Alors

$$P\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n), \qquad P\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} B_k\right) = \lim_{n\to+\infty} P(B_n).$$

Application. En notant B_n l'évènement "Monsieur J. n'est pas en retard les n premiers jours", il est clair qu'on introduit une suite d'évènements décroissante. En effet, si Monsieur J. n'est pas en retard les $n+1$ premiers jours, il ne l'était pas non plus les n premiers jours

$$B_{n+1} \subset B_n.$$

Par indépendance des arrivées en classe pour des jours différents, on a

$$P(B_n) = \left(\frac{99}{100}\right)^n$$

Comme $|99/100| < 1$, on a alors

$$P\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} B_k\right) = \lim_{n\to+\infty} P(B_n) = 0.$$

Ainsi, l'évènement contraire est presque sûr.

Exercice 1

On lance indéfiniment une pièce donnant *Pile* avec la probabilité p et *Face* avec la probabilité $q = 1-p$. On suppose que $p \in]0,1[$ et on admet que les lancers sont mutuellement indépendants.

Pour tout entier naturel k, supérieur ou égal à 2, on dit que le $k^{ième}$ lancer est un changement s'il amène un résultat différent de celui du $(k-1)^{ième}$ lancer.

On note P_k (resp. F_k) l'événement : "on obtient *Pile* (resp. *Face*) au $k^{ième}$ lancer".
Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de changements survenus durant les n premiers lancers.

(1) X_2 compte le nombre de changement après deux lancers. On comprend alors qu'après deux lancers, on a pu avoir ou bien deux fois la même face (et donc aucun changement), ou bien deux faces différentes (et donc un changement). Ainsi, $X_2(\Omega) = \{0; 1\}$ et X_2 suit une loi de Bernoulli de paramètre

$$P(X_2 = 1) = P(P_1 \cap F_2 \cup F_1 \cap P_2) = P(P_1)P(F_2) + P(F_1)P(P_2) = pq + qp = 2pq,$$

où le calcul s'appuie sur le fait que les deux alternatives ci-dessus sont disjointes et les lancers indépendants. On a alors

$$X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(2pq).$$

Le cours permet d'affirmer directement que

$$E(X_2) = 2pq, \qquad V(X_2) = 2pq(1 - 2pq).$$

(2) Avec 3 lancers, on peut avoir aucun changement (toujours la même face de la pièce), un changement ou au plus deux changements. Donc $X_3(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.

$$\begin{aligned} P(X_3 = 0) &= P(F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cup P_1 \cap P_2 \cap P_3) \\ &= P(F_1 \cap F_2 \cap F_3) + P(P_1 \cap P_2 \cap P_3) \qquad \text{(par incompatibilité)} \\ &= P(F_1)P(F_2)P(F_3) + P(P_1)P(P_2)P(P_3) \qquad \text{(par indépendance des lancers)} \\ &= q^3 + p^3 \end{aligned}$$

Si on a deux changement, on change de face de la pièce à chaque lancer.

$$\begin{aligned} P(X_3 = 2) &= P(F_1 \cap P_2 \cap F_3 \cup P_1 \cap F_2 \cap P_3) \\ &= P(F_1 \cap P_2 \cap F_3) + P(P_1 \cap F_2 \cap P_3) \qquad \text{(par incompatibilité)} \\ &= P(F_1)P(P_2)P(F_3) + P(P_1)P(F_2)P(P_3) \qquad \text{(par indépendance des lancers)} \\ &= qpq + pqp = pq(q + p) = pq \qquad \text{(car } p + q = 1) \end{aligned}$$

On en déduit

$$P(X_3 = 1) = 1 - P(X_3 = 0) - P(X_3 = 2) = 1 - pq - q^3 - p^3.$$

Observons que

$$(p + q) = 1, \qquad 1 = (p + q)^2 = p^2 + 2pq + q^2, \qquad 1 = (p + q)^3 = p^3 + 3p^2q + 3pq^2 + q^3.$$

Avec le même raisonnement que précédemment, en 4 lancers, on peut avoir entre 0 et 3 changements donc $X_4(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$. Comme précédemment, les deux cas extremaux sont les plus faciles à exprimer et obtenir. On a

$$\begin{aligned} P(X_4 = 0) &= P(F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap F_4 \cup P_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap P_4) \\ &= P(F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap F_4) + P(P_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap P_4) \qquad \text{(par incompatibilité)} \\ &= P(F_1)P(F_2)P(F_3)P(F_4) + P(P_1)P(P_2)P(P_3)P(P_4) \qquad \text{(par indépendance des lancers)} \\ &= q^4 + p^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X_4 = 3) &= P(F_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap P_4 \cup P_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap F_4) \\ &= P(F_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap P_4) + P(P_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap F_4) \qquad \text{(par incompatibilité)} \\ &= P(F_1)P(P_2)P(F_3)P(P_4) + P(P_1)P(F_2)P(P_3)P(F_4) \qquad \text{(par indépendance des lancers)} \\ &= qpqp + pqpq \\ &= 2p^2q^2 \end{aligned}$$

Pour avoir un seul changement, il y a de nombreux cas. On a donc une première série de *Pile* (de longueur de 1 à 3) suivie d'une série de *Face*, ou l'inverse.

$$\begin{aligned} (X_4 = 1) &= (P_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap F_4) \cup (P_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap F_4) \cup (P_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap F_4) \\ &\qquad \cup (F_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap P_4) \cup (F_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4) \cup (F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap P_4). \end{aligned}$$

Le calcul des probabilités, avec les mêmes arguments que précédemment, donne

$$\begin{aligned} P(X_4=1) &= pq^3+p^2q^2+p^3q+qp^3+q^2p^2+q^3p \\ &= 2pq(q+pq+p) \\ &= 2pq(1+pq) \end{aligned}$$

On déduit

$$\begin{aligned} P(X_4=2) &= 1-q^4-p^4-2pq(1+pq)-2p^2q^2 \\ &= 1-q^4-p^4-2pq \end{aligned}$$

(3) Procédons par récurrence.

- <u>initialisation.</u> Pour $n=2$, on a déjà mentionné que X_2 suivait une Bernoulli de paramètre $2pq=1/2$. C'est bien une binomiale de paramètre $n-1$ et $1/2$.

- <u>hérédité.</u> On suppose que, pour un certain $n \geq 2$, $X_n \hookrightarrow B(n-1,1/2)$. Il est alors capital d'observer qu'entre le $n-$ième lancer et le $(n+1)-$ième lancer, le nombre de changements peut rester le même ou bien augmenter de 1, ce qui se traduit par

$$P_{X_n=j}(X_{n+1}=k)=0, \qquad \text{si} \quad j \notin \{k,k-1\}.$$

Soit $k \in [\![0,n]\!]$. On doit traiter le cas $k=0$ à part car cela veut dire qu'on reste à 0 changements, mais on a déjà une formule

$$P(X_{n+1}=0)=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}=\binom{n}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^{0}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}.$$

Pour $k \geq 1$, par la formule des probabilités totales appliquée au s.c.e $\{[X_n=j]\ j \in [\![0,n-1]\!]\}$,

$$\begin{aligned} P(X_{n+1}=k) &= \sum_{j=0}^{n-1} P_{X_n=j}(X_{n+1}=k)P(X_n=j) \\ &= P_{X_n=k-1}(X_{n+1}=k)P(X_n=k-1)+P_{X_n=k}(X_{n+1}=k)P(X_n=k) \\ &= P(S_{n+1}=1)P(X_n=k-1)+P(S_{n+1}=0)P(X_n=k) \\ &= \frac{1}{2}\binom{n-1}{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{1}{2}\binom{n-1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\left(\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n}\binom{n}{k}, \qquad \text{(par triangle de Pascal)} \\ &= \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}, \end{aligned}$$

ce qui est bien la formule attendue.

Les lois obtenues pour X_3 et X_4 sont bien celles des lois binomiales de paramètres respectifs $\mathcal{B}(2,1/2)$ et $\mathcal{B}(3,1/2)$. En effet

$$\binom{2}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^{0}\left(\frac{1}{2}\right)^{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2}=\frac{1}{4}=\left(\frac{1}{2}\right)^{3}+\left(\frac{1}{2}\right)^{3},$$

$$\binom{2}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{1}=2\left(\frac{1}{2}\right)^{2}=\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{3}-\left(\frac{1}{2}\right)^{3}$$

et

$$\binom{2}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{0}=\frac{1}{4}=\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right).$$

On omet la vérification pour X_4.

PSI 2022-2023

Khôlles de Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
Paul Valéry, Paris 12ème.

Planche de khôlles n°2

Semaine du 14/11

Question de cours

On considère des évènements $A_1, A_2, ..., A_n$ tels que $P(A_1 \cap ... \cap A_n) \neq 0$. Alors
$$P(A_1 \cap ... \cap A_n) = P(A_1)P_{A_1}(A_2) \times ... \times P_{A_1 \cap .. \cap A_{n-1}}(A_n).$$

Application. Introduisons les évènements B_i (resp. N_i) "la $i-$ème boule piochée est blanche (resp. noire)". Commençons par observer que $X(\Omega) = [\![1, N]\!]$. En effet, on peut piocher la boule noire dès le premier tirage ou, au pire, vider d'abord l'urne de ses $N-1$ boules blanches et n'avoir la boule noire qu'au $N-$ième tirage. Toutes les valeurs intermédiaires sont possibles. On a, pour tout $k \in [\![1, N]\!]$,

$$\begin{aligned}
P(X = k) &= P(B_1 \cap B_2 \cap ... \cap B_{k-1} \cap N_k) \\
&= P(B_1)P_{B_1}(B_2) \times ... \times P_{B_1 \cap .. \cap B_{k-2}}(B_{k-1})P_{B_1 \cap .. \cap B_{k-1}}(N_k) \qquad \text{(par la FPT)} \\
&= \frac{N-1}{N} \times \frac{N-2}{N-1} \times ... \times \frac{N-1-(k-2)}{N-(k-2)} \times \frac{1}{N-(k-1)} \\
&= \frac{1}{N} \qquad \text{(par télescopage)}
\end{aligned}$$

On reconnait, contre toute attente, une loi uniforme $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, N]\!])$.

Exercice 2

Un binôme de deux personnes nommées A et B participent à une épreuve physique. Ces deux personnes doivent grimper une corde. Une fois que l'une des deux personnes a réussi, elle doit attendre que l'autre personne en fasse de même. On suppose que :

- A et B disposent chacun de leur propre corde.
- A et B ont droit à autant d'essais qu'ils le souhaitent.
- Les essais sont indépendants.
- Chaque essai, qu'il soit réussi ou non, dure une minute et est réussi avec probabilité p.

On note X_1 (resp. X_2) le nombre d'essais nécessaires à A (resp. B) pour grimper la corde, et Y la variable aléatoire réelle égale à $|X_1 - X_2|$.

(1) X_1 (ainsi que X_2) représente le temps d'attente du premier succès (qui se produit avec probabilité p) lors de répétitions identiques et indépendantes d'une épreuve de Bernoulli. Il s'agit donc d'une loi géométrique de paramètre p
$$X_1 \hookrightarrow \mathcal{G}(p), \qquad X_2 \hookrightarrow \mathcal{G}(p).$$

On aurait aussi pu obtenir la loi *à la main*. Étant clair qu'on peut réussir dès la première tentative ou rater un nombre arbitrairement grand de fois, on a $X_1(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, par indépendance des tentatives

$$P(X_1 = k) = P(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap ... \cap \overline{A}_{k-1} \cap A_k) = P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)...P(\overline{A}_{k-1})P(A_k) = (1-p)^{k-1}p.$$

(2) $[Y = 0]$ si et seulement si $X_1 = X_2$ c'est à dire si et seulement si les deux concurrents réussissent en même temps. Les deux variables peuvent coïncider pour toute valeur $k \in \mathbb{N}^*$. On va utiliser la formule des probabilités totales avec le s.c.e $\{[X_1 = j] : \ j \in \mathbb{N}^*\}$

$$\begin{aligned}
P(Y=0) &= P(X_1 = X_2) = \sum_{j=1}^{+\infty} P([X_1 = X_2 \cap [X_1 = j]) \\
&= \sum_{j=1}^{+\infty} P([X_2 = j \cap [X_1 = j]) \\
&= \sum_{j=1}^{+\infty} P([X_2 = j])P([[X_1 = j]) \qquad \text{(par indépendance de } X_1 \text{ et } X_2) \\
&= \sum_{j=1}^{+\infty} p^2 \left((1-p)^2\right)^{j-1} \\
&= p^2 \times \frac{1}{(1-(1-p)^2)} \\
&= \frac{p}{2-p}.
\end{aligned}$$

(3) C'est la même méthode pour $[Y = k]$ en remarquant au préalable que

$$[Y = k] \Longleftrightarrow [X_1 - X_2 = k] \cup [X_2 - X_1 = k]$$

Par symétrie, on a donc

$$P(Y = k) = 2P(X_2 - X_1 = k)$$

Par la formule des probabilités totales avec le s.c.e $\{[X_1 = j] : \ j \in \mathbb{N}^*\}$, on a

$$\begin{aligned}
P(Y=k) &= 2P(X_2 - X_1 = k) = 2\sum_{j=1}^{+\infty} P([X_2 - X_1 = k \cap [X_1 = j]) \\
&= 2\sum_{j=1}^{+\infty} P([X_2 = j + k \cap [X_1 = j]) \\
&= 2\sum_{j=1}^{+\infty} P([X_2 = j + k])P([[X_1 = j]) \qquad \text{(par indépendance de } X_1 \text{ et } X_2) \\
&= \sum_{j=1}^{+\infty} p^2 (1-p)^{j+k-1+j-1} \\
&= \frac{2p(1-p)^k}{2-p}.
\end{aligned}$$

Planche de khôlles n°3

Semaine du 14/11

Question de cours

Soient $(A_k)_{k\in I}$ un système complet d'évènements et B un autre évènement. Alors

$$P(B) = \sum_{k\in I} P(A_k \cap B) = \sum_{k\in I} P(A_k)P_{A_k}(B).$$

En effet, on sait que $\bigcup_{k\in I} A_k = \Omega$ donc

$$B = B\cap\Omega = B\cap\left(\bigcup_{k\in I} A_k\right) = \bigcup_{k\in I}(B\cap A_k).$$

La réunion ci-dessus est disjointe, ce qui donne la formule.

Un exemple. Introduisons, pour $k\in[\![1,n]\!]$, l'évènement A_k "on choisit l'urne k'. Il est alors clair que $P(A_k) = 1/n$. Une fois l'urne choisie, on pioche une boule. Le numéro de la boule est donc des numéros présents dans l'ensemble des urnes, donc $X(\Omega) = [\![1,n]\!]$.
Soient alors $k, j\in[\![1,n]\!]$. Si $j\leq k$, alors la boule j est bien dans l'urne k et on la pioche avec probabilité $1/k$. Sinon, elle n'y est pas, ce qui se traduit par

$$P_{A_k}(X=j)\begin{cases} \frac{1}{k}, & \text{si } 1\leq j\leq k \\ 0, & \text{si } j>k \end{cases}$$

Par la FPT appliquée au s.c.e $\{A_k,\ k\in[\![1,n]\!]\}$, on a

$$\begin{aligned} P(X=j) &= \sum_{k=1}^{n} P(A_k)P_{A_k}(X=j) \\ &= \sum_{k=j}^{n} P(A_k)P_{A_k}(X=j) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=j}^{n}\frac{1}{k} \end{aligned}$$

Exercice 1

Introduisons les évènements W_i (resp. B_i) "Mr. White (resp. Black) réussit son $i-$ième tir. On introduit aussi X la v.a qui prend la valeur du premier tir réussit par White (ou qui vaut 0 si White meurt). Il est clair que $W(\Omega) = \mathbb{N}$, et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, par indépendance des tirs successifs,

$$\begin{aligned} P(X = k) &= P\left(\overline{W}_1 \cap \overline{B}_1 \cap ... \cap \overline{W}_{k-1} \cap \overline{B}_{k-1} \cap W_k\right) \\ &= P(\overline{W}_1)P(\overline{B}_1)...P(\overline{W}_{k-1})P(\overline{B}_{k-1})P(W_k) \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{2}{9}\right)^{k-1}. \end{aligned}$$

Notons W_∞ l'évènement "White gagne le duel". Alors

$$P(W_\infty) = P\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty}[W = k]\right) = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{2}{9}\right)^{k-1} = \frac{3}{7}.$$