PSI 2022-2023

Khôlles de Mathématiques - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`
Paul Valéry, Paris 12ème.

Planche de khôlles n°1

Semaine du 16/01

Question de cours

Déterminer le rayon de convergence des séries entières

$$(i)\ \sum \frac{(-1)^n}{1 \times 3 \times 5 \times ... \times (2n-1)} z^n, \qquad (ii)\ \sum \frac{\sqrt{n}}{2n+1} z^{2n}.$$

Exercice 1

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $|a| \neq |b|$. On considère la matrice $A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} a & b & a & ... & a & b \\ b & a & b & ... & b & a \\ a & b & a & ... & b & a \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots \\ b & a & ... & ... & b & a \end{pmatrix}$$

(1) Justifier que A est diagonalisable.
(2) Déterminer, en différenciant $n = 1$ et $n > 1$ le rang de A. En déduire, dans le cas $n > 1$ une première valeur propre de A.
(3) En considérant un vecteur dont toutes les composantes sont égales à 1, déterminer une autre valeur propre de A.
(4) En s'inspirant de la question ci-dessus, déterminer un vecteur propre associé à une troisième valeur propre de A. Conclure quant à l'expression d'une matrice diagonale à laquelle A est semblable.

Exercice 2

Pour $n \geq 2$, on considère la matrice $A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont tous nuls sauf ceux sur la sous-diagonale et ceux sur la sur-diagonale, tous égaux à 1. On note $P_n(x) = \det(xI_n - A_n)$ sont polynôme caractéristique.

(1) Calculer P_1 et P_2. Montrer que, pour tout $n \geq 2$, $P_n(x) = xP_{n-1}(x) - P_{n-2}(x)$.
(2) Pour $x \in]-2, 2[$, on pose $2\cos(\alpha) = x$ avec $\alpha \in]0; \pi[$. Montrer que $\sin(\alpha)P_n(x) = \sin((n+1)\alpha)$.
(3) En déduire les valeurs propres de A_n. Est-elle diagonalisable ?

Planche de khôlles n°2

Semaine du 16/01

Question de cours

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum(\exp(1/n)-1)\,z^n$.

Exercice 1

Soit $\sum a_n z_n$ une série entière de rayon de convergence ρ. On pose

$$b_n = \frac{a_n}{1+|a_n|}$$

et on considère la série entière $\sum b_n z^n$ dont on note le rayon de convergence R.

(1) Montrer que $R \geq \max(1,\rho)$.

(2) En distinguant les cas $\rho > 1$ et $\rho = 0$ et $0 < \rho \leq 1$, montrer qu'en fait $R = \max(1,\rho)$.

Exercice 2

La somme de matrices diagonalisables est-elle encore une matrice diagonalisable ?

Exercice 3

On considère un hyperplan H de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $(A_1, ..., A_p)$ une base de H et I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Le but est de montrer que H contient au moins une matrice inversible. *On suppose donc que H ne contient aucune matrice inversible.*

(1) Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = H \oplus \mathrm{Vect}(I_n)$.

(2) Soit N une matrice nilpotente, c'est à dire pour laquelle il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $N^{k-1} \neq 0$ et $N^k = 0$.
   (a) Quelles sont les valeurs propres de N? La matrice est-elle diagonalisable?
   (b) Montrer qu'il existe une matrice $B \in H$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $N = B + \lambda I$.
   (c) Montrer que λ est une valeur propre de N.
   (d) En déduire que $N \in H$ puis que H contient toutes les matrices nilpotentes.

(3) Déterminer une matrice inversible qui s'écrive comme somme de deux matrices nilpotentes. Conclure.

PSI 2022-2023

Khôlles de Mathématiques - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`
Paul Valéry, Paris 12ème.

Planche de khôlles n°3

Semaine du 16/01

Question de cours

Déterminer, avec deux arguments différents, le rayon de convergence de la série entière $\sum (\ln(n))x^n$.

Exercice 1

On considère alors la base canonique $\mathcal{B} = (E_{i,j} : \ (i,j) \in [\![1;n]\!]^2)$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(1) Les matrices $E_{i,j}$ sont-elles diagonalisables ?

On cherche à construire une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formée de matrices toutes diagonalisables. On considère les matrices

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad M_{i,j} = \begin{cases} D + E_{i,j}, & \text{si } i \neq j \\ E_{i,i}, & \text{si } i = j \end{cases}$$

(2) Que peut-on dire de $M_{i,j}$ si $i = j$?

(3) Justifier que chaque matrice $M_{i,j}$ est diagonalisable.

(4) On note alors $\mathcal{B}' = (M_{i,j} : \ (i,j) \in [\![1;n]\!]^2)$.

  (a) Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que
$$B = A - \sum_{i \neq j} a_{i,j} M_{i,j}$$
  est une matrice diagonale.

  (b) Montrer que $\mathcal{B}'$ forme une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(5) Comment pourrait-on construire d'autres telles bases ?

Exercice 2

(1) Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $\rho > 0$. Montrer que $\sum (a_n/n!)x^n$ a pour rayon de convergence $+\infty$.

(2) On suppose maintenant que la série entière $\sum (a_n/n!)x^n$ a pour rayon de convergence $\rho > 0$. Que dire du rayon de convergence de $\sum a_n x^n$?