PSI 2022-2023

Khôlles de Mathématiques - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`
Paul Valéry, Paris 12ème.

Planche de khôlles n°1

Semaine du 17/10

Question de cours

En encadrant la fonction partie entière, et à l'aide d'une somme de Riemann, montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \lfloor \sqrt{k} \rfloor = \frac{2}{3}.$$

Exercice 1

Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, on définit sur $\mathbb{R}$, la fonction f_n par

$$f_n(x) = x^n \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

(1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale I_n est convergente, où

$$I_n = \int_0^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t.$$

(2) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_{n+2} = (n+1)I_n.$$

(3) Calculer I_1.

(4) Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$I_{2n} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(2n)!}{2^n n!}, \quad \text{et} \quad I_{2n+1} = 2^n n!$$

Exercice 2

On considère la fonction f, affine par morceaux, nulle sur $\mathbb{R}_-$, définie et **continue** sur $\mathbb{R}$ comme suit : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f\left(\frac{n+1}{2}\right) = 1$ et, sur $[n, n+1]$, f est nulle en dehors de $\left[\frac{n+1}{2} - \frac{1}{n^2}; \frac{n+1}{2} + \frac{1}{n^2}\right]$.

(1) Dessiner l'allure de la courbe de f.

(2) Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\mathrm{d}t$.

(3) Montrer la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$.

(4) À quelle propriété tentante vient-on de construire un contre-exemple?

Planche de khôlles n°2

Semaine du 17/10

Question de cours

Déterminer la nature des intégrales suivantes

$$(i)\ \int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t-1}\mathrm{d}t, \qquad (ii)\ \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x+e^x}\mathrm{d}x, \qquad (iii)\ \int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{t^2}{2t+1}}\mathrm{d}t, \qquad (iv)\ \int_0^{1} \frac{\ln(x)}{1-x^2}\mathrm{d}x.$$

Exercice 1

On considère la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad G(x) = \int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t.$$

(1) Prouver que G est une fonction impaire puis, déterminer le signe de G sur $\mathbb{R}$.
(2) Montrer que

$$\forall\, x \in [0, +\infty[, \quad G(x) \geq \frac{x^3}{3}.$$

(3) En déduire la limite de $G(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$. Quelle est la limite de $G(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$?
(4) Construire le tableau de variations de G sur $\mathbb{R}$ en y faisant figurer les limites en $-\infty$ et $+\infty$ ainsi que la valeur en 0.
(5) On cherche alors un équivalent de $G(x)$ lorsque $x \to +\infty$. Soit $x > 1$.

   (a) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, qu'il existe une constante $\kappa_1 > 0$ telle que

   $$G(x) = \kappa_1 + \frac{e^{x^2}}{2x} + \int_1^x \frac{e^{t^2}}{2t^2}\mathrm{d}t.$$

   (b) Justifier que $t \mapsto e^{t^2}/t^4$ est croissante sur $[2, +\infty[$ et montrer qu'il existe une constante $\kappa_2 > 0$ telle que

   $$\int_1^x \frac{e^{t^2}}{2t^2}\mathrm{d}t \leq \frac{e^{x^3}}{3} - \frac{e}{4} + \kappa_2.$$

   (c) En déduire que

   $$G(x) = \frac{e^{x^2}}{2x} + o\left(\frac{e^{x^2}}{2x}\right),$$

   et conclure quant à l'équivalent cherché.

PSI 2022-2023

Khôlles de Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
Paul Valéry, Paris 12ème.

Planche de khôlles n°3

Semaine du 17/10

Question de cours

Déterminer la nature de l'intégrale
$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{1/x}-1}{\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}\mathrm{d}x.$$

Exercice 1

Soit $x \in [0;1[$ fixé.

(1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\sum_{p=1}^{n} \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t.$$

(2) Montrer que
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t = 0.$$

(3) Que peut-on conclure quant à la convergence et à la valeur de la somme de la série $\displaystyle\sum_{p\geq 1} \frac{x^p}{p}$?

Exercice 2

Pour tout couple (p,q) d'entiers naturels, on pose
$$I\left(p,q\right) = \int_0^1 x^p \left(1-x\right)^q \mathrm{d}x.$$

(1) Montrer que , pour tout couple $(p,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$
$$I\left(p,q\right) = \frac{q}{p+1} I\left(p+1, q-1\right).$$

(2) En déduire que, pour tout couple $(p,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$
$$I\left(p,q\right) = \frac{p!q!}{(p+q)!} I\left(p+q, 0\right).$$

(3) Déterminer$I\left(p+q,0\right)$ et montrer finalement que
$$I\left(p,q\right) = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}.$$