PSI 2022-2023

Khôlles de Mathématiques - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`
Paul Valéry, Paris 12ème.

Planche de khôlles n°1

Semaine du 19/09

Question de cours

Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt{n}}{n^2+\sqrt{n}}$ converge.

Exercice 1

On pose $x_0 > 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$.

(1) Déterminer la nature de la série de terme général $\frac{1}{x_n}$?

(2) Trouver une relation entre x_{n+1}^2 et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{x_k^2}$.

(3) Trouver un équivalent de x_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 2

(1) On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Vérifier que l'on a $A^2 \neq 0$ et calculer A^3.
(b) Déterminer une base (u) de $\operatorname{Ker}(f)$ ainsi qu'une base (v, w) de $\operatorname{Im}(f)$.
(c) Montrer que $\operatorname{Im}(f^2) = \operatorname{Ker}(f)$.

Dans la suite, on considère un endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ tel que

$$g^2 \neq 0, \qquad \text{et} \qquad g^3 = 0,$$

On se propose de montrer, dans ce cas plus général, que $\operatorname{Im}(g^2) = \operatorname{Ker}(g)$.

(2) (a) Justifier qu'il existe un vecteur u de $\mathbb{R}^3$ tel que $g^2(u) \neq 0$.
(b) Montrer que $(u, g(u), g^2(u))$ est une base de $\mathbb{R}^3$, que l'on notera $\mathcal{B}'$.
(c) Donner la matrice N de g dans la base $\mathcal{B}'$.
(d) Déterminer $\operatorname{Im}(g)$ et donner sa dimension. En déduire une base de $\operatorname{Ker}(g)$. Pour finir, déterminer $\operatorname{Im}(g^2)$ puis conclure.

Planche de khôlles n°2

Semaine du 19/09

Question de cours

Montrer la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$.

Exercice 1

Soit $\alpha > 0$. On considère les fonctions f_1 et f_2, définie sur $\mathbb{R}$, par

$$f_1(x) = e^{\alpha x}, \qquad\qquad f_2(x) = xe^{\alpha x},$$

on note E l'espace vectoriel $E = \mathrm{Vect}(f_1, f_2)$ et Δ l'endomorphisme de E défini par $\Delta : g \longmapsto g'$.

(1) Vérifier que (f_1, f_2) est libre et forme bien une base de E.
(2) Quelle est la matrice, que l'on notera A, de Δ dans cette base ? Δ est-il un automorphisme?
(3) Calculer A^2 puis A^3. Conjecturer une formule pour A^n (pour $n \in \mathbb{N}^*$) que l'on démontrera par récurrence.
(4) En déduire les expression de $f_1^{(n)}(x)$ et $f_2^{(n)}(x)$.

Exercice 2

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle telle que $A^2 = 0$ et $\mathrm{rg}(A) = r$. On note $(u_1, u_2, ..., u_r)$ une base de $\mathrm{Im}(A)$.

(1) Quelle est la dimension de Ker(A)?
(2) Montrer que Im(A) $\subset \mathrm{Ker}(A)$. En déduire que $n \geq 2r$.
(3) En déduire qu'il existe des vecteurs $v_1, v_2, ..., v_{n-2r}$ tels que $(u_1, ..., u_r, v_1, ..., v_{n-2r})$ forme une base de $\mathrm{Ker}(A)$.
(4) Montrer qu'il existe une matrice P inversible telle que

$$A = P \left(\begin{array}{c|c} 0 & I_r \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) P^{-1},$$

où I_r désigne la matrice identité de taille r.

Exercice 3

(1) Déterminer, à l'aide d'une comparaison série/intégrale, un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$.
(2) En déduire l'ensemble des valeurs α pour lesquelles la série de terme général u_n converge, où

$$u_n = \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+...+\sqrt{n}}{n^\alpha}.$$

PSI 2022-2023

Khôlles de Mathématiques - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`
Paul Valéry, Paris 12ème.

Planche de khôlles n°3

Semaine du 19/09

Question de cours

À l'aide d'une comparaison série/intégrale, déterminer la nature de la série $\sum_{k\geq 2} \frac{1}{k\ln(k)}$.

Exercice 1

(1) Montrer la convergence des séries $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

(2) Montrer que
$$\frac{(-1)^n}{(-1)^n+\sqrt{n}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right), \quad n \to +\infty.$$

(3) Étudier la convergence de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{(-1)^n+\sqrt{n}}$.

(4) Quel point important du cours cet exercice a-t-il pour but de mettre en évidence?

Exercice 2

Soient E un espace vectoriel et f un endomorphisme de E vérifiant
$$f^2 + 2f - 3\mathrm{id}_E = 0.$$

(1) Montrer que f est un automorphisme et déterminer f^{-1} en fonction de f.

(2) Montrer que
$$\mathrm{Im}(f - 3\mathrm{id}_E) \subset \mathrm{Ker}(f + \mathrm{id}_E) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(f + \mathrm{id}_E) \subset \mathrm{Ker}(f - 3\mathrm{id}_E).$$
Justifier que tous ces sous-espaces sont stables sous l'action de f.

(3) Déterminer deux réels α et β tels que
$$\forall x \in E, \qquad x = \alpha(f(x) + x) + \beta(f(x) - 3x).$$

(4) En déduire que $\mathrm{Ker}(f - 3\mathrm{id}_E)$ et $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{id}_E)$ sont supplémentaires dans E.

Exercice 3

Soit φ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que
$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \qquad \varphi(AB) = \varphi(BA).$$
Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, tel que $\varphi = \lambda \mathrm{tr}$.

Bonus 1.

(1) Déterminer la nature de la série $\sum u_n$ où

$$u_n = \frac{1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}}{\ln(n!)}, \qquad n \geq 1.$$

(On pourra essayer de minorer le numérateur par une intégrale.)

(2) Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer la convergence de la série de terme général u_n où

$$u_n = \frac{1}{n} \int_0^1 t^n f(t) \mathrm{d}t.$$

Bonus 2.

Soient $u = (1,0,0)$, $v = (1,1,1)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et $F = \mathrm{Vect}(u,v)$. Trouver un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $\mathrm{Ker}(f) = F$.

Bonus 3.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}^n$. On considère un endomorphisme f de E tel que

$$f^2 = -\mathrm{Id}.$$

(1) (a) Soit $u \in E$, $u \neq 0$. Montrer, par l'absurde, que la famille $(u, f(u))$ est libre.
(b) Montrer que le sous-espace $F_u = \mathrm{Vect}(u, f(u))$ est *stable* sous l'action de f.

(2) Dans cette question uniquement on considère le cas $n = 2$.
(a) Donner, en exhibant une matrice qui représenterait f dans la base canonique, un exemple d'un tel endomorphisme.
(b) À l'aide de la question 1a, montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f présente des 0 sur la diagonale. Expliciter la matrice trouvée.

(3) On revient au cas général. On suppose[1] que $n = 2k$ est pair.
(a) On suppose qu'il existe, pour un certain $i \in [\![1; k-1]\!]$, des vecteurs $(u_1, u_2, ..., u_i)$ tels que la famille

$$(u_1, f(u_1), u_2, f(u_2), ..., u_i, f(u_i))$$

est libre. Montrer qu'il existe un vecteur u_{i+1} tel que la famille

$$(u_1, f(u_1), u_2, f(u_2), ..., u_i, f(u_i), u_{i+1}, f(u_{i+1}))$$

est encore libre.
(b) En déduire l'existence d'une base dans laquelle la matrice de f est de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

[1]En fait, il est possible de montrer que c'est nécessaire