



Planche de khôlles n°1

Éléments de solution

Question de cours

On raisonne par équivalents. Ici tout est positif. On a

$$\frac{\sqrt{n}}{n^2 + \sqrt{n}} \sim \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{3/2}}$$

Or la série $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ est convergente (Riemann) donc on peut appliquer le critère d'équivalence des SATP et notre série converge.

Exercice 1

On pose $x_0 > 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$.

- (1) Commençons par observer que, par une récurrence immédiate tous les termes de la suite sont strictement positifs. On voit également que $x_{n+1} - x_n : 1/x_n$ et la remarque précédente permet de conclure que la suite (x_n) est croissante. Il suit qu'elle est soit divergente vers $+\infty$ soit convergente vers une certaine limite $\ell \geq x_0 > 0$. Supposons que ce soit la deuxième alternative, en passant à la limite dans la relation de récurrence, on obtiendrait

$$\ell = \ell + \frac{1}{\ell} \iff \frac{1}{\ell} = 0$$

ce qui n'est pas possible. Ainsi, $x_n \rightarrow +\infty$, lorsque $n \rightarrow +\infty$.

De plus,

$$\frac{1}{x_k} = x_{k+1} - x_k$$

donc, par télescopage

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{x_k} = x_{n+1} - x_0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

ou encore, la série $\sum \frac{1}{x_n}$ diverge.

- (2) On reprend la relation de départ

$$x_{n+1}^2 = \left(x_n + \frac{1}{x_n}\right)^2 = x_n^2 + 2 + \frac{1}{x_n^2}$$

Il suit que, toujours avec un petit télescopage,

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{x_k^2} = \sum_{k=0}^n (x_{k+1}^2 - x_k^2) - \sum_{k=0}^n 2 = x_{n+1}^2 - x_0^2 - 2(n+1).$$

(3) La relation de la question précédente se réécrit

$$2(n+1) = x_{n+1}^2 - \sum_{k=0}^n \frac{1}{x_k^2} - x_0^2 = x_{n+1}^2 - \sum_{k=0}^n \frac{1}{x_k^2} + o(x_{n+1}^2)$$

Si on était capable de montrer que

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{x_k^2} = o(x_{n+1}^2),$$

alors on aurait $x_{n+1}^2 \sim 2(n+1)$ et le tour serait pour ainsi dire joué. Reste à travailler avec cette somme partielle.

On sait que (x_k) est croissante donc

$$\frac{1}{x_k} \leq \frac{1}{x_0}$$

ce qui donne

$$\frac{1}{x_k^2} \leq \frac{1}{x_0 x_k}$$

et alors

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{x_k^2} \leq \frac{1}{x_0} \sum_{k=0}^n \frac{1}{x_k} = \frac{x_{n+1} - x_0}{x_0}$$

et alors, le miracle s'accomplit,

$$0 \leq \frac{\sum_{k=0}^n \frac{1}{x_k^2}}{x_{n+1}^2} \leq \frac{1}{x_{n+1}} \left(\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_{n+1}} \right)$$

Par les gendarmes, le quotient tend vers 0 (car $x_{n+1} \rightarrow +\infty$) et on a ce qu'on voulait. Ouf.

Au final, on peut écrire

$$x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2n}.$$

Exercice 2

(1) On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 et on considère l'endomorphisme f de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base \mathcal{B} est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Le calcul donne

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \neq 0, \quad \text{et} \quad A^3 = 0$$

(b) On résout

$$\begin{aligned}
 X = (x, y, z) \in \text{Ker}(f) &\iff A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \\
 &\iff \begin{cases} 2x + y + 2z = 0 \\ -x - y - z = 0 \\ -x - z = 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} y = 0 \\ z = -x \end{cases} \\
 &\iff X = (x, 0, -x) = x(1, 0, -1)
 \end{aligned}$$

Ainsi, posant $u = (1, 0, -1)$, on a $\text{Ker}(f) = \text{Vect}(u)$ et u étant non nul, il forme bien une base du noyau de f qui est alors de dimension 1. Par le théorème du rang, l'image de f est alors de dimension 2. Il suffit de prendre deux colonnes de la matrice de f qui ne soient pas colinéaires, disons les deux premières, pour avoir une base de l'image. En posant

$$v = (2, -1, -1), \quad \text{et} \quad w = (1, -1, 0),$$

on a bien $\text{Im}(f) = \text{Vect}(v, w)$ et (v, w) forme bien une base de l'image de f .

(c) D'après le calcul de A^2 (qui est la matrice de f^2 dans la base canonique de \mathbb{R}^3 , il est clair que (comme trois fois la même colonne qui correspond aux coordonnées de u dans la base canonique)

$$\text{Im}(f^2) = \text{Vect}(u) = \text{Ker}(f).$$

Dans la suite, on considère un endomorphisme g de \mathbb{R}^3 tel que

$$g^2 \neq 0, \quad \text{et} \quad g^3 = 0,$$

ce qui signifie que $g \circ g$ n'est pas l'endomorphisme nul, mais que $g \circ g \circ g$ est l'endomorphisme nul. En désignant par M la matrice de g dans la base canonique \mathbb{R}^3 de \mathbb{R}^3 on a donc : $M^2 \neq 0$ et $M^3 = 0$.

On se propose de montrer, dans ce cas plus général, que $\text{Im}(g^2) = \text{Ker}(g)$.

(2) (a) Comme $g^2 \neq 0$, il existe nécessairement $u \in \mathbb{R}^3$ tel que $g^2(u) \neq 0$ (sinon g^2 enverrait tout élément sur 0 et serait l'endomorphisme nul).

(b) Comme on est en dimension 3 et en présence de 3 vecteurs, il suffit de montrer que la famille est libre. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que

$$au + bg(u) + cg^2(u) = 0 \quad (\star).$$

En appliquant g^2 à la relation (\star) , comme $g^3 = g^4 = 0$, on obtient

$$g^2(au + bg(u) + cg^2(u)) = ag^2(u) = 0.$$

Mais comme $g^2(u) \neq 0$, on a nécessairement $a = 0$. Ainsi, (\star) devient

$$bg(u) + cg^2(u) = 0.$$

On applique alors maintenant g et on obtient

$$g(bg(u) + cg^2(u)) = bg^2(u) = 0$$

et comme précédemment $b = 0$. Il ne reste dans (\star) que $cg^2(u) = 0$ qui donne $c = 0$. On a bien $a = b = c = 0$ ce qui montre bien que la famille est libre et que celle-ci forme une base de \mathbb{R}^3 .

- (c) Par définition de la matrice d'une application dans une base, et comme $g(g^2(u)) = g^3(u) = 0$, on a

$$\text{Mat}(g, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- (d) On voit avec la matrice ci-dessus que le rang de g est alors 2 (la dimension de son noyau est 1). Attention, les colonnes ici donnent les coordonnées (et les coordonnées seulement) dans la base \mathcal{B}' des vecteurs que l'on va prendre pour l'image et la noyau. On a clairement

$$\text{Im}(g) = \text{Vect}(g(u), g^2(u)), \quad \text{Ker}(g) = \text{Vect}(g^2(u)).$$

La matrice de g^2 dans cette même base est alors

$$\text{Mat}(g^2, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ce qui permet d'écrire (observant que $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est le vecteur colonne correspondant aux coordonnées de $g^2(u)$ dans \mathcal{B}')

$$\text{Im}(g^2) = \text{Vect}(g^2(u)) = \text{Ker}(g),$$

ce qui est bien la conclusion souhaitée.



Planche de khôlles n°2

Éléments de solution

Question de cours

On fait apparaître une quantité usuelle dont on connaît le DL en 0 (ici à l'ordre 1 à

$$\begin{aligned}
 \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n} &= \frac{\sqrt{n}}{n} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1 \right) \\
 &= \frac{1}{n^{1/2}} \left(\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \\
 &\sim \frac{1}{n^{1/2}} \times \frac{1}{2n} \\
 &\sim \frac{1}{2n^{3/2}}
 \end{aligned}$$

Or, la série $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ est convergente (Riemann) (et donc le double aussi). Par critère d'équivalence pour les séries à termes positifs, notre série converge.

Exercice 1

Soit $\alpha > 0$. On considère les fonctions f_1 et f_2 , définie sur \mathbb{R} , par

$$f_1(x) = e^{\alpha x}, \quad f_2(x) = x e^{\alpha x},$$

on note E l'espace vectoriel $E = \text{Vect}(f_1, f_2)$ (E est donc un sous-espace vectoriel est de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$) et Δ l'endomorphisme de E défini par

$$\Delta : g \longmapsto g'.$$

- (1) Montrons que la famille (f_1, f_2) est libre en montrant que f_1 et f_2 ne sont pas colinéaires. Supposons qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel quel $f_2 = \lambda f_1$, ce qui signifie que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x e^{\alpha x} = \lambda e^{\alpha x}.$$

Comme une exponentielle ne s'annule jamais, ceci donne

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x = \lambda,$$

ce qui est clairement impossible (dès que $x \neq \lambda$). Ainsi la famille est libre. Comme elle engendre (par définition de E) l'espace E , elle en forme une base. En particulier, $\dim(E) = 2$.

(2) Il faut calculer les images des vecteurs de la base

$$\begin{aligned}\Delta f_1(x) &= f_1'(x) = \alpha e^{\alpha x} \\ &= \alpha f_1(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta f_2(x) &= f_2'(x) = e^{\alpha x} + x\alpha e^{\alpha x} \\ &= f_1(x) + \alpha f_2(x)\end{aligned}$$

Ainsi, on peut écrire la matrice de Δ dans la base (f_1, f_2) :

$$A = \text{Mat}(\Delta, (f_1, f_2)) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

(3) Pour montrer que l'endomorphisme Δ est un automorphisme, il suffit de justifier que la matrice précédente est inversible, ce qui peut se faire à l'aide du déterminant (qui vaut ici $\alpha^2 \neq 0$ - car α est supposé strictement positif) ou car la matrice est triangulaire supérieure avec pour seul coefficient diagonal α qui est non nul.

Remarque. L'endomorphisme Δ est donc ici un automorphisme de E . On fera bien attention à comprendre que l'application consistant à dériver est bijective lorsqu'on la regarde sur l'espace E . Si celle-ci est toujours bien linéaire sur $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ ou sur $\mathbb{R}_n[X]$, elle n'y est plus du tout bijective.

(4) Le calcul donne

$$A^2 = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 2\alpha \\ 0 & \alpha^2 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} \alpha^3 & 3\alpha^2 \\ 0 & \alpha^3 \end{pmatrix},$$

de sorte qu'on peut conjecturer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad A^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & n\alpha^{n-1} \\ 0 & \alpha^n \end{pmatrix},$$

ce que l'on va démontrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$. Il n'est nécessaire que de montrer le caractère héréditaire de la propriété, celle-ci étant déjà initialisée. Supposons donc que, pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, on ait

$$A^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & n\alpha^{n-1} \\ 0 & \alpha^n \end{pmatrix}.$$

Alors,

$$A^{n+1} = A \cdot A^n = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha^n & n\alpha^{n-1} \\ 0 & \alpha^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^{n+1} & (n+1)\alpha^n \\ 0 & \alpha^{n+1} \end{pmatrix},$$

ce qui est bien la propriété au rang $(n+1)$ et termine la récurrence.

(5) Dériver n fois revient à appliquer Δ^n dont la matrice est justement A^n . Comme f_1 a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dans la base (f_1, f_2) , on a

$$\Delta^n f_1 = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^n \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha^n f_1 + 0f_2$$

donc

$$f_1^{(n)}(x) = \alpha^n e^{\alpha x}.$$

De la même manière,

$$\Delta^n f_2 = A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n\alpha^{n-1} \\ \alpha^n \end{pmatrix} = n\alpha^{n-1} f_1 + \alpha^n f_2$$

et donc

$$f_2^{(n)}(x) = (n\alpha^{n-1} + \alpha^n x) e^{\alpha x}.$$

Exercice 2

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle telle que $A^2 = 0$ et $\text{rg}(A) = r$. On note (u_1, u_2, \dots, u_r) une base de $\text{Im}(A)$.

- (1) Quelle est la dimension de $\text{Ker}(A)$?
- (2) Montrer que $\text{Im}(A) \subset \text{Ker}(A)$. En déduire que $n \geq 2r$.
- (3) En déduire qu'il existe des vecteurs $v_1, v_2, \dots, v_{n-2r}$ tels que $(u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_{n-2r})$ forme une base de $\text{Ker}(A)$.
- (4) Montrer qu'il existe une matrice P inversible telle que

$$A = P \left(\begin{array}{c|c} 0 & I_r \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) P^{-1},$$

où I_r désigne la matrice identité de taille r .

Exercice 3

- (1) On obtient sans difficulté

$$\sum_{k=1}^n \sqrt{k} \sim \frac{2}{3}n\sqrt{n}.$$

- (2) Il suit que

$$u_n \sim \frac{2}{3n^{\alpha-\frac{3}{2}}}$$

et par critère d'équivalence pour SATP et critère de Riemann cette série converge si et seulement si $\alpha - 3/2 > 1$ ou encore si et seulement si $\alpha > 5/2$.