**PSI 2022-2023**

Khôlles de Mathématiques - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`
Paul Valéry, Paris 12ème.

# Planche de khôlles n°1

*Semaine du 21/11*

## Question de cours

Formule des probabilités totales. Énoncé **et démonstration**.

*Application.* Un auto-stoppeur attend au péage d'une autoroute pendant une certaine période. On admet que le nombre de véhicules franchisant le péage pendant cette période est une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. A chaque fois qu'un véhicule franchit le péage, il lance une pièce truquée qui donne pile avec la probabilité $p$. On pose $q = 1 - p$.
On note $N$ et $X$ les variables aléatoires qui comptent, respectivement, le nombre de lancers et le nombre de piles obtenus.
Montrer que $X$ suit une loi de Poisson dont on précisera le paramètre.

## Exercice 1

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$. On pose, pour $P, Q \in E$

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\mathrm{d}t$$

On note $(P_0, P_1, P_2)$ la base canonique de $E$.

(1) Vérifier que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $E$.
(2) On cherche une base orthonormée $(R_0, R_1, R_2)$ de $E$ pour ce produit scalaire qu'on va construire à partir de la base canonique de $E$ par le procédé de Gram-Schmidt.
  (a) Que doit-on prendre pour $R_0$?
  (b) On cherche $R_1$ tel que $R_1 \in \mathrm{Vect}(P_0, P_1)$, $\langle R_1, R_0 \rangle = 0$ et $||R_1|| = 1$. Déterminer un tel vecteur.
  (c) Comment construire, sur le même modèle $R_2$? Expliciter le vecteur obtenu.

## Exercice 2

Une urne contient des boules vertes et des boules blanches, indiscernables au toucher. La proportion de boules vertes est $p$, $0 < p < 1$; la proportion de boules blanches est $1 - p$. On effectue une suite de tirages successifs d'une boule avec remise.

On note $N_V$ la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir la première boule verte, et $N_B$ la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir la première boule blanche.

(1) Quelles sont les lois des variables aléatoires $N_V$ et $N_B$ ? Rappeler la valeur de leurs espérances.

On définit la variable aléatoire $X$ qui prend la valeur $i$ si et seulement si les $i$ premières boules tirées sont de la même couleur et la $(i+1)-$ième est de l'autre couleur.

(2) Déterminer la loi de la variable aléatoire $X$.
(3) Montrer que la variable aléatoire $X$ admet une espérance et que

$$E(X) = \frac{p}{1-p} + \frac{1-p}{p}.$$

(4) Montrer que $E(X)$ est minimale lorsque $p = \frac{1}{2}$, et calculer cette valeur minimale.

# Planche de khôlles n°2

*Semaine du 21/11*

## Question de cours

Pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(A\,{}^tB)$.

(1) Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(2) En déduire que, pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(R)$ symétriques, on a

$$\mathrm{tr}(AB)^2 \leq \mathrm{tr}(A^2)\mathrm{tr}(B^2)$$

## Exercice 1

On considère une urne contenant une boule noire et trois boules blanches. On effectue le jeu suivant :

- On commence par piocher des boules de l'urne une à une avec remise jusqu'à obtenir la boule noire (que l'on remet aussi dans l'urne). On définit la variable aléatoire $N$ égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir la boule noire.

- Puis, lorsque $N$ prend une valeur entière positive non nulle notée $n$, on réalise alors une seconde série de $n$ tirages dans l'urne, toujours avec remise. On définit la variable aléatoire $X$ égale au nombre de fois où la boule noire a été obtenue dans cette seconde série de tirages.

On **admet** que: $\forall x \in ]-1, 1[$, $\forall k \in N$, $\displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$.

(1) (a) Reconnaître la loi de la variable aléatoire $N$.

(b) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}$. Justifier que

$$P_{(N=n)}(X=k) = \begin{cases} 0, & \text{si } k > n \\ \binom{n}{k}\left(\frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{3}{4}\right)^{n-k}, & \text{si } 0 \leq k \leq n \end{cases}$$

(c) Vérifier, à l'aide de la formule des probabilités totales, que : $P(X=0) = \dfrac{3}{7}$.

(2) (a) Montrer que: $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\quad P(X=k) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{k+1} \displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} \left(\frac{9}{16}\right)^n = \frac{16}{21}\left(\frac{3}{7}\right)^k$.

(b) Vérifier qu'on a bien $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k) = 1$.

Montrer que $X$ admet une espérance que l'on calculera.

# Planche de khôlles n°3

*Semaine du 21/11*

## Question de cours

Énoncé de la formule des probabilités composées.
Énoncé de la limite monotone.

*Application.* Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire. On effectue une série de tirages aléatoires d'une boule jusqu'à obtenir une boule noire. A chaque tirage amenant une boule blanche, on replace la boule blanche puis on multiplie par 2 le nombre de boules blanches présentes dans l'urne après la remise de la boule, puis on procède au tirage suivant.
On note $B_n$ l'évènement "les $n$ premiers tirages amènent une boule blanche. Calculer $P(B_n)$. Montrer qu'on n'obtient jamais la boule noire avec une probabilité strictement positive.

## Exercice 1

On considère l'ensemble

$$E = \{P \in \mathbb{R}[X] : \ P(0) = P(1) = 0\}$$

(1) Montrer que $E$ est un espace vectoriel.

(2) Montrer que l'application $\varphi$ définie sur $E \times E$ par

$$\varphi(P, Q) = -\int_0^1 P(t)Q''(t)\mathrm{d}t$$

est un produit scalaire sur $E$.

(3) On considère le sous-espace $F = E \cap \mathbb{R}_3[X]$.
  (a) Déterminer une base de $F$.
  (b) Déterminer une base de $F$, orthonormée pour $\varphi$, construite par le procédé de Gram-Schmidt à partir de la base précédente.

## Exercice 2

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}$.

(1) Montrer que l'application $\varphi : (u, v) \mapsto^t XMY$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$ (où $X$ et $Y$ représentent respectivement les vecteurs colonnes des coordonnées de $u$ et $v$ dans la base canonique).
(2) À l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée à un $v$ bien choisi, montrer que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad (x + 4y)^2 \leq 2\left(x^2 + 6xy + 10y^2\right)$$