PSI 2022-2023

Khôlles de Mathématiques - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`
Paul Valéry, Paris 12ème.

Planche de khôlles n°1

Semaine du 21/11

Question de cours

Soient $(A_k)_{k\in I}$ un système complet d'évènements et B un autre évènement. Alors

$$P(B) = \sum_{k\in I} P(A_k \cap B) = \sum_{k\in I} P(A_k)P_{A_k}(B).$$

En effet, on sait que $\displaystyle\bigcup_{k\in I} A_k = \Omega$ donc

$$B = B\cap\Omega = B\cap\left(\bigcup_{k\in I} A_k\right) = \bigcup_{k\in I}(B\cap A_k).$$

La réunion ci-dessus est disjointe, ce qui donne la formule.

Application. D'après les données du texte, $N \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$. Sachant $[N=n]$, X correspond au nombre de *Pile* obtenus (inteprétés comme des succès, de probabilité p) lors de n répétitions identiques et indépendances d'une même épreuve de Bernoulli (lancer de la pièce). On reconnait, conditionnellement à $[N=n]$, une loi binomiale de paramètres n et p. Ainsi, on peut écrire, pour tous $n,k\in\mathbb{N}^*$,

$$P_{[N=n]}(X=k) = \begin{cases} \binom{n}{k}p^kq^{n-k}, & \text{si } 0\leq k\leq n \\ 0, & \text{si } k>n \end{cases}$$

(en effet, il est impossible d'obtenir plus de *Pile* que le nombre de lancers). Par la formule des probabilités totales, appliquée au s.c.e $\{[N=n]\ :\ n\in\mathbb{N}\}$, on a

$$\begin{aligned} P(X=k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(N=n)P_{[N=n]}(X=k) = \sum_{n=k}^{+\infty} P(N=n)P_{[N=n]}(X=k) \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}p^kq^{n-k}e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{p^k}{k!}\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{\lambda^nq^{n-k}}{(n-k)!} = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{p^k}{k!}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{n+j}q^j}{j!} \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{(\lambda p)^k}{k!}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{(\lambda q)^j}{j!} = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{\lambda q} \\ &= e^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^k}{k!} \end{aligned}$$

et on reconnait la formule de la loi de Poisson de paramètre λp, donc

$$X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda p).$$

Exercice 1

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$. On pose, pour $P, Q \in E$

$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\mathrm{d}t$$

On note (P_0, P_1, P_2) la base canonique de E.

(1) On vérifie que $\langle \cdot, \cdot\rangle$ est un produit scalaire sur E :

- Soient $P, Q \in E$. Par commutativité du produit de nombres réels,
$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} Q(t)P(t)\mathrm{d}t = \langle Q, P\rangle$$
et $\langle \cdot, \cdot\rangle$ est symétrique.

- Soient P, Q, R trois éléments de E et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors
$$\begin{aligned} \langle \lambda P + R, Q\rangle &= \int_{-1}^{1} (\lambda P + R)(t)Q(t)\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} (\lambda P(t) + R(t))Q(t)\mathrm{d}t \\ &= \lambda \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\mathrm{d}t + \int_{-1}^{1} R(t)Q(t)\mathrm{d}t \\ &= \lambda\langle P, Q\rangle + \langle R, Q\rangle \end{aligned}$$
donc $\langle \cdot, \cdot\rangle$ est bien linéaire à gauche. Étant aussi symétrique, il est alors linéaire à droite.

- Soit $P \in E$.
$$\langle P, P\rangle = \int_{-1}^{1} P^2(t)\mathrm{d}t \geq 0$$
par croissance de l'intégrale et du fait que, pour tout $t \in \mathbb{R}$ (et *a fortiori* tout $t \in [-1, 1]$), $P(t)^2 \geq 0$. Ainsi, $\langle \cdot, \cdot\rangle$ est positive.

- La fonction $t \mapsto P(t)^2$ est polynomiale donc continue sur $[-1, 1]$ et à valeurs positives. Ainsi,
$$0 = \langle P, P\rangle = \int_{-1}^{1} P^2(t)\mathrm{d}t \geq 0 \iff \big(\forall t \in [-1, 1], \quad P(t)^2 = 0\big)$$
Mais un polynôme constant égal à zéro sur un segment est constant égal à 0 partout sur $\mathbb{R}$ ce qui donne bien
$$\langle P, P\rangle = 0 \iff P = 0$$
et $\langle \cdot, \cdot\rangle$ est définie.

On a bien montré que $\langle \cdot, \cdot\rangle$ était un produit scalaire sur E.

(2) On cherche une base orthonormée (R_0, R_1, R_2) de E pour ce produit scalaire qu'on va construire à partir de la base canonique de E par le procédé de Gram-Schmidt.

(a) On veut que les nouveaux vecteurs soient orthonormés. On prend donc
$$R_0 = \frac{P_0}{||P_0||} = \frac{P_0}{\left(\int_{-1}^{1} P_0(t)^2\mathrm{d}t\right)^{1/2}} = \frac{P_0}{\sqrt{2}}$$

(b) On commence par chercher un vecteur de la forme $R_1' = P_1 + \alpha R_0$ tel que

$$\langle P_1 + \alpha R_0, R_0 \rangle = 0 \Longleftrightarrow \alpha = -\langle P_1, R_0 \rangle = \frac{\langle P_1, P_0 \rangle}{||P_0||}.$$

On calcule et on trouve $\alpha = 0$ car dans ce cas particulier, on avait déjà $\langle P_0, P_1 \rangle = 0$. On "normalise" ensuite le vecteur trouvé

$$R_1 = \frac{R_1'}{||R_1'||} = \frac{P_1}{||P_1||} = \sqrt{\frac{3}{2}} P_1.$$

(c) On commence par chercher un élément (non normalisé) R_2' de la forme

$$R_2' = P_2 + \beta R_1 + \alpha R_0$$

vérifiant

$$\langle R_2', R_0 \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle R_2', R_1 \rangle = 0$$

La première condition donne

$$\alpha = -\langle P_2, R_0 \rangle = -\int_{-1}^{1} \frac{t^2}{\sqrt{2}} \mathrm{d}t = -\frac{\sqrt{2}}{3},$$

alors que la seconde condition donne

$$\beta = -\langle P_2, R_1 \rangle = -\int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{3}{2}} t^3 \mathrm{d}t = 0$$

Pour obtenir R_2, on normalise R_2'

$$R_2 = \frac{R_2'}{||R_2'||} = \frac{P_2 - \frac{1}{3} P_0}{\left\| P_2 - \frac{1}{3} P_0 \right\|}$$

Le calcul donne

$$\left\| P_2 - \frac{1}{3} P_0 \right\| = 3\sqrt{\frac{8}{5}}$$

et au final, la base orthonormale de E pour ce produit scalaire est

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}} X, \sqrt{\frac{8}{5}} (3X^2 - 1) \right)$$

Exercice 2

Une urne contient des boules vertes et des boules blanches, indiscernables au toucher. La proportion de boules vertes est p, $0 < p < 1$; la proportion de boules blanches est $1 - p$. On effectue une suite de tirages successifs d'une boule avec remise.

On note N_V la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir la première boule verte, et N_B la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir la première boule blanche.

(1) N_V est le rang du premier V dans une suite de tirages indépendants avec $\mathrm{P}(V) = p$ (équiprobabilité des boules) à chaque tirage. Donc $N_V \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ et de même $N_B \hookrightarrow \mathcal{G}(1-p)$. D'après le cours, on a donc

$$E(N_V) = \frac{1}{p}, \qquad E(N_B) = \frac{1}{1-p}.$$

On définit la variable aléatoire X qui prend la valeur i si et seulement si les i premières boules tirées sont de la même couleur et la $(i+1)-$ième est de l'autre couleur.

(2) Commençons par observer que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$. En effet, La valeur minimale que peut prendre X est 1 si jamais les deux premières boules ne sont pas de la même couleur. Ensuite, on peut avoir une première série de boules de même couleur *abitrairement* longue et donc toutes les valeurs $k \in \mathbb{N}^*$ sont possible. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $(X = k)$ si et seulement si on a k verte puis une blanche (ce qui équivaut à $N_B = k+1$) ou inversement (c'est à dire $N_V = k+1$). Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(X = k) &= \mathrm{P}\left((N_V = k+1) \cup (N_B = k+1)\right) \\ &= \mathrm{P}(N_V = k+1) + \mathrm{P}(N_B = k+1) \\ &= (1-p)^k p + p^k (1-p). \end{aligned}$$

(3) Comme les valeurs prises par la variable aléatoire X sont positives, celle-ci admet une espérance si et seulement si la série de terme général $kP(X = k)$ est convergente. Or

$$kP(X=k) = k\left((1-p)^k p + p^k(1-p)\right) = p(1-p)k(1-p)^{k-1} + p(1-p)kp^{k-1},$$

et on reconnait une combinaison de deux termes généraux de séries géométriques dérivées (de raison p et $(1-p)$) convergentes. Donc notre série converge et X admet une espérance. De plus,

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=1}^{+\infty} kP(X=k) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\left((1-p)^k p + p^k(1-p)\right) \\ &= p(1-p)\sum_{k=1}^{+\infty} k(1-p)^{k-1} + p(1-p)\sum_{k=1}^{+\infty} kp^{k-1} \\ &= p(1-p) \times \frac{1}{(1-(1-p))^2} + p(1-p) \times \frac{1}{(1-p))^2} \\ &= \frac{p}{1-p} + \frac{1-p}{p}, \end{aligned}$$

ce qui était attendue.

(4) Considérons alors la fonction f définie sur $]0;1[$ par

$$f(p) = E(X) = \frac{p}{1-p} + \frac{1-p}{p}.$$

Cette fonction est combinaison de quotients de polynomes dont les dénominateurs ne s'annulent pas sur $]0;1[$ donc elle est dérivable et

$$f'(p) = \frac{2p-1}{p^2(1-p)^2}$$

ce qui permet de dresser le tableau de variations de f

p	0		$1/2$		1
$f'(p)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$
f	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$ $\Vert$

On peut alors conclure que $E(X)$ est minimale lorsque $p = 1/2$ (et elle vaut alors 2); c'est quand on a les mêmes proportion de vertes et de blanches que l'on a en moyenne, les listes monocolore les plus courtes.

PSI 2022-2023

Khôlles de Mathématiques - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`
Paul Valéry, Paris 12ème.

Planche de khôlles n°2

Semaine du 21/11

Question de cours

(1) Montrons que $\langle \cdot,\cdot\rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

- On sait que la trace est invariante par transposition et que ${}^t(A^tB) = B^tA$. Il suit que
$$\langle B, A\rangle = \mathrm{tr}(B^tA) = \mathrm{tr}\left({}^t(A^tB)\right) = \mathrm{tr}(A^tB) = \langle A, B\rangle$$
et $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est symétrique.

- Soient $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On a, par linéarité de la trace,
$$\begin{aligned}\langle \alpha A + C, B\rangle &= \mathrm{tr}\left((\alpha A + C)^tB\right) = \mathrm{tr}(\alpha A^tB + C^tB)\\ &= \alpha\mathrm{tr}(A^tB) + \mathrm{tr}(C^tB)\\ &= \alpha\langle A, B\rangle + \langle C, B\rangle\end{aligned}$$
et $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est linéaire à gauche. Étant symétrique, elle est aussi linéaire à droite.

- Si $A = (a_{i,j})_{i,j\in[\![1,n]\!]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors $A^tA = \left(\sum_{k=1}^n a_{i,k}a_{j,k}\right)_{i,j\in[\![1,n]\!]}$ et donc
$$\langle A, A\rangle = \mathrm{tr}(A^tA) = \sum_{i=1}^n\left(\sum_{k=1}^n a_{i,k}^2\right) \geq 0$$
donc $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est bien positive.

- Du calcul précédent, on déduit aussi immédiatement que
$$0 = \langle A, A\rangle = \sum_{i=1}^n\left(\sum_{k=1}^n a_{i,k}^2\right) \Longleftrightarrow \left(\forall i, j \in [\![1, n]\!],\ a_{i,j}^2 = 0\right) \Longleftrightarrow A = 0$$
donc $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est aussi définie.

On a bien montré que $\langle \cdot,\cdot\rangle$ était un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(2) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(R)$ symétriques. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a
$$\langle A, B\rangle^2 \leq \langle A, A\rangle\langle B, B\rangle.$$
Or, A et B étant symétriques, ${}^tA = A$ et ${}^B = B$, ce qui donne bien
$$\mathrm{tr}(AB)^2 \leq \mathrm{tr}(A^2)\mathrm{tr}(B^2).$$

Exercice 1

On considère une urne contenant une boule noire et trois boules blanches. On effectue le jeu suivant :

- On commence par piocher des boules de l'urne une à une avec remise jusqu'à obtenir la boule noire (que l'on remet aussi dans l'urne). On définit la variable aléatoire N égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir la boule noire.

- Puis, lorsque N prend une valeur entière positive non nulle notée n, on réalise alors une seconde série de n tirages dans l'urne, toujours avec remise. On définit la variable aléatoire X égale au nombre de fois où la boule noire a été obtenue dans cette seconde série de tirages.

On **admet** que: $\forall x \in]-1,1[,\ \forall k \in N,\quad \displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}.$

(1) (a) La première expérience ayant lieu avec remise, chaque tirage se produit dans les mêmes conditions avec une probabilité $1/4$ d'obtenir la boule noire. La variable N correspond alors au *temps d'attente du premier succès* (obtenir la boule noire) lors d'une répétition (infinie) d'épreuves de Bernoulli (identiques et indépendantes): on reconnait une loi géométrique de paramètre $1/4$

$$N \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{4}\right).$$

En particulier, $N(\Omega) = \mathbb{N}^*$, et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$P(N=k) = \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \frac{1}{4}.$$

Le cours nous donne aussi

$$E(N) = 4, \qquad V(N) = 12.$$

(b) Soit $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Sachant $[N = n]$, on réalise n tirages avec remise et on s'intéresse au nombre de succès (obtenir la noire) lors de ces n tirages. Si $k > n$, il n'est pas possible d'obtenir plus de boules noires que de boules tirées et la probabilité cherchée est nulle. Sinon, on reconnait alors une loi binomiale de paramètres n et $1/4$, on peut donc écrire, pour $k \in [\![0, n]\!]$,

$$P_{(N=n)}(X=k) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{3}{4}\right)^{n-k}.$$

(c) D'après la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'évènements $\{(N=n) :\ n \in \mathbb{N}^*\}$, on peut écrire

$$\begin{aligned}
P(X=0) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P_{(N=n)}(X=0) P(N=n) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{n}{0} \left(\frac{3}{4}\right)^n \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \left(\frac{1}{4}\right) \\
&= \frac{3}{16} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{2(n-1)} = \frac{3}{16} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{9}{16}\right)^{n-1} \\
&= \frac{3}{7}.
\end{aligned}$$

(2) (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Toujours grâce à la formule des probabilités totales appliquée au même s.c.e et en utilisant que $P_{(N=n)}(X=k)=0$ si $n<k$, on obtient

$$\begin{aligned}
P(X=k) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P_{(N=n)}(X=k)P(N=n) = \sum_{n=k}^{+\infty} P_{(N=n)}(X=k)P(N=n)\\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k}\left(\frac{1}{4}\right)^{k}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-k}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\frac{1}{4}\\
&= \left(\frac{1}{4}\right)^{k+1}\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}\left(\frac{3}{4}\right)^{2n-(k+1)}\\
&= \left(\frac{1}{4}\right)^{k+1}\left(\frac{3}{4}\right)^{-(k+1)}\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}\left(\frac{3}{4}\right)^{2n}\\
&= \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1}\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}\left(\frac{9}{16}\right)^{n}
\end{aligned}$$

En utilisant la formule admise en préambule (avec $x=9/16$), on obtient

$$\begin{aligned}
P(X=k) &= \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1}\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}\left(\frac{9}{16}\right)^{n}\\
&= \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1}\times\frac{\left(\frac{9}{16}\right)^{k}}{\left(1-\frac{9}{16}\right)^{k+1}}\\
&= \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1}\left(\frac{9}{7}\right)^{k}\frac{16}{7}\\
&= \frac{16}{21}\left(\frac{3}{7}\right)^{k}.
\end{aligned}$$

(b) En combinant les différentes questions précédentes

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k) &= P(X=0)+\sum_{k=1}^{+\infty}P(X=k)\\
&= \frac{3}{7}+\frac{16}{21}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{3}{7}\right)^{k} = \frac{3}{7}+\frac{16}{49}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{3}{7}\right)^{k-1}\\
&= \frac{3}{7}+\frac{16}{49}\times\frac{1}{1-\frac{3}{7}} = \frac{3}{7}+\frac{16}{49}\times\frac{7}{4} = \frac{3}{7}+\frac{4}{7}\\
&= 1,
\end{aligned}$$

comme attendu.
La variable X admet une espérance si et seulement si la série de terme général $kP(X=k)$ converge (absolument). Or, pour $k \geq 1$,

$$kP(X=k) = \frac{16}{49}k\left(\frac{3}{7}\right)^{k-1}$$

et on reconnait le multiple du terme général d'une série géométrique dérivée de raison $3/7$ donc convergente. Ainsi, X admet un espérance et

$$E(X) = \frac{16}{49}\times\frac{1}{\left(1-\frac{3}{7}\right)^{2}} = 1.$$

PSI 2022-2023

Khôlles de Mathématiques - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`
Paul Valéry, Paris 12ème.

Planche de khôlles n°3

Semaine du 21/11

Question de cours

Limite monotone.
Soient (A_n) une suite d'évènement croissante (au sens de l'inclusion) et (B_n) une suite d'évènements décroissante (au sens de l'inclusion). Alors

$$P\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n), \qquad P\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} B_k\right) = \lim_{n\to+\infty} P(B_n).$$

Formule des probabilités composées.
On considère des évènements $A_1, A_2, ..., A_n$ tels que $P(A_1 \cap ... \cap A_n) \neq 0$. Alors

$$P(A_1 \cap ... \cap A_n) = P(A_1)P_{A_1}(A_2) \times ... \times P_{A_1\cap ..\cap A_{n-1}}(A_n).$$

Application. Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire. On effectue une série de tirages aléatoires d'une boule jusqu'à obtenir une boule noire. A chaque tirage amenant une boule blanche, on replace la boule blanche puis on multiplie par 2 le nombre de boules blanches présentes dans l'urne après la remise de la boule, puis on procède au tirage suivant.

Introduisons les évènements W_k "la boule tirée au $k$ième tirage est blanche. Il est alors clair que

$$B_n = \bigcap_{k=1}^{n} W_k$$

ce qui permet notamment de voir (même si une réponse intuitive se comprend) sur

$$B_{n+1} = \bigcap_{k=1}^{n+1} W_k \subset \bigcap_{k=1}^{n} W_k = B_n$$

et la suite (B_n) est décroissante au sens de l'inclusion. Notant B_∞ l'évènement "on n'obtient jamais la noire", le résultat de limite monotone ci-dessus permet d'écrire

$$P(B_\infty) = P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(B_n).$$

Reste alors à calculer $P(B_n)$ et sa limite. Par la formule des probabilités composées

$$P(B_n) = P\left(\bigcap_{k=1}^{n} W_k\right) = P(W_1)P_{W_1}(W_2)...P_{\bigcap_{k=1}^{n-1} W_k}(W_n)$$

Sachant qu'on a déjà pioché $k-1$ boules blanches consécutivement, on a multiplié par 2 le nombre de blanches $k-1$ fois, nombre initialement égal à 1 et qui vaut alors maintenant 2^{k-1} (pour un total de boules dans l'urne égal à $1+2^{k-1}$), ceci se traduit comme

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad P_{\bigcap_{j=1}^{k-1} W_j}(W_k) = \frac{2^{k-1}}{1+2^{k-1}}$$

En injectant ceci dans la formule des probabilités composées ci-avant, on obtient finalement

$$P(B_n) = \prod_{k=1}^{n} \frac{2^{k-1}}{1+2^{k-1}} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2^k}{1+2^k}.$$

Si on veut travailler avec un produit, la méthode classique est d'en prendre le log. On peut alors écrire, observant au préalable que

$$\frac{1+2^k}{2^k} = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$\ln(P(B_n)) = -\sum_{k=0}^{n} \ln\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^k\right)$$

Or, comme

$$\ln\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^k\right) \sim \left(\frac{1}{2}\right)^k, \quad k \to +\infty$$

et que la série $\sum (1/2)^k$ converge (géométrique de raison 1/2) le critère d'équivalence pour les SATP permet de garantir la convergence de la série $\sum \ln\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^k\right)$ et donc de l'existence de la limite

$$S = \sum_{k=0}^{+\infty} \ln\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^k\right).$$

Ainsi, par continuité de l'exponentielle,

$$P(B_\infty) = \lim_{n\to+\infty} P(B_n) = e^{-S} > 0$$

et on peut conclure qu'on n'obtient jamais la boule noire avec une probabilité strictement positive.

Exercice 1

On considère l'ensemble

$$E = \{P \in \mathbb{R}[X] : \; P(0) = P(1) = 0\}$$

(1) On montre que E est un e-v en montrant que c'est un s-ev e $\mathbb{R}[X]$ en montrant pour cela qu'il est non vide et stable par combinaison linéaire:

- Le polynôme nul est clairement élément de E donc $E \neq \emptyset$.
- Si $P, Q \in E$, et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$(\lambda P + Q)(0) = \lambda P(0) + Q(0) = 0 = \lambda P(1) + Q(1) = (\lambda P + Q)(1)$$

donc $\lambda P + Q \in E$ qui est bien un espace vectoriel.

(2) Commençons par observer que, par Intégration par parties (IPP), on a, pour tous $P, Q \in E$

$$\varphi(P,Q) = -[PQ']_0^1 + \int_0^1 P'(t)Q'(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 P'(t)Q'(t)\mathrm{d}t$$

car $P(0) = Q(0) = 1$. Ainsi, il est assez immédiat que φ est symétrique. Par linéarité de l'intégrale, elle est clairement d'après la définition linéaire à gauche et par symétrie, linéaire à droite. De plus,

$$\varphi(P,P) = \int_0^1 P'(t)^2 \mathrm{d}t \geq 0$$

par positivité de l'intégrale. De plus, par continuité et positivité de $t \mapsto P'(t)^2$ (sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0;1]$)

$$\varphi(P,P) = 0 \Longleftrightarrow \int_0^1 P'(t)^2 \mathrm{d}t = 0 \Longleftrightarrow \forall t \in [0;1], \quad P'(t) = 0.$$

Or P' est un polynôme. Le fait que la fonction soit nulle sur $[0;1]$ implique qu'elle est identiquement nulle. Ce qui implique que P est un polynôme constant. Mais $P(0) = 0$ donne alors que P est identiquement nul. La réciproque est immédiate. Ainsi, φ est également définie et c'est bien un produit scalaire sur E.

(3) On considère le sous-espace $F = E \cap \mathbb{R}_3[X]$.

(a) Soit $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$. On peut écrire

$$\begin{aligned} P \in F &\Longleftrightarrow P(0) = P(1) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} d &=& 0 \\ a+b+c &=& 0 \end{array} \right. \\ &\Longleftrightarrow P = a(X^3 - X) + b(X^2 - X) \end{aligned}$$

ou encore

$$F = \mathrm{Vect}(X^3 - X;\ X^2 - X)$$

Les deux vecteurs ci-dessus forment donc une famille génératrice de F. Etant clairement non colinéaires (degrés différents et non nuls), la famille est libre et forme alors une base de F.

(b) On note $P_1 = X^2 - X$ et $P_2 = X^3 - X$. On cherche une famille (R_1, R_2) orthonormée pour φ construite à partir de (P_1, P_2).

Pour R_1, on prend

$$R_1 = \frac{P_1}{||P_1||} = \sqrt{\frac{1}{3}}(X^2 - X).$$

Pour R_2, on commence par chercher R_2' de la forme $R_2' = P_2 + \alpha R_1$ avec α tel que $\varphi(R_2', R_1) = 0$, c'est à dire

$$\alpha = -\varphi(P_2, R_1) = 2\sqrt{\frac{1}{3}} \int_0^1 (t^3 - t)\mathrm{d}t = -\frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

Ensuite, on normalise

$$R_2 = \frac{R_2'}{||R_2'||}$$

et le calcul est... long.

Exercice 2

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}$.

(1) Montrons que φ est un produit scalaire.

- Comme M est symétrique, il est immédiat que φ est symétrique.

- La linéarité à droite est immédiate également (c'est celle du produit matriciel) et par symétrie, φ est aussi linéaire à gauche.

- Soit u de coordonnées $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Alors

$$\begin{aligned}
\varphi(u,u) &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x+3y \\ 3x+10y \end{pmatrix} \\
&= x(x+3y) + y(3x+10y) = x^2 + 6xy + 10y^2 \\
&= (x+3y)^2 + 9y^2 \geq 0
\end{aligned}$$

  donc φ est positive.

- Du calcul précédent, on déduit,

$$\begin{aligned}
\varphi(u,u) = 0 &\iff (x+3y)^2 + 9y^2 = 0 \\
&\iff (x+3y)^2 = 0 \quad \text{et} \quad 9y^2 = 0 \\
&\iff x = y = 0 \\
&\iff u = 0
\end{aligned}$$

  et φ est bien définie.

On a bien montré que φ était un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

(2) D'après les calculs précédents, en notant $u = (x,y)$ et $v = (a,b)$, on a, par Cauchy-Schwarz,

$$(x(a+3b) + y(3a+10b))^2 = \varphi(u,v) \leq \varphi(u,u)\varphi(v,v) = \left(x^2 + 6xy + 10y^2\right)\left(a^2 + 6ab + 10b^2\right).$$

En choisissant v de sorte que $a + 3b = 1$ et $3a + 10b = 4$, ce qui donne $b = 1$, $a = -2$ puis $a^2 + 6ab + 10b^2 = 2$, on obtient bien

$$(x+4y)^2 \leq 2\left(x^2 + 6xy + 10y^2\right).$$