PSI 2022-2023

Khôlles de Mathématiques - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`
Paul Valéry, Paris 12ème.

Planche de khôlles n°1

Semaine du 23/01

Question de cours

Déterminer le rayon de convergence des séries entières

$$(i)\ \sum (2+ni)z^n, \qquad (ii)\ \sum a^{\sqrt{n}} z^n, \quad (a>0)$$

Exercice 1

Soient (a_n) et (b_n) deux suites de nombres réels positifs. On note ρ et ρ' les rayons de convergence respectifs des séries $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$. Soient f et g définies par

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \quad (x \in]-\rho, \rho[), \qquad g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \quad (x \in]-\rho', \rho'[)$$

On **suppose** qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell$.

(1) Montrer que $\rho \geq \rho'$.

On suppose, dans toute la suite, que $\rho' = 1$ et que la série $\sum b_n$ diverge.

(2) Soit $M \geq 0$. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ et $\delta > 0$ tel que

$$\forall x \in]1-\delta, 1[, \qquad \sum_{n=0}^{N} b_n x^n \geq M.$$

(3) En déduire que $g(x) \to +\infty,\ x \to 1$.

(4) Soient $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que $(\ell - \varepsilon)b_n \leq a_n \leq (\ell + \varepsilon)$ pour tout $n \geq N$.

(a) Montrer qu'il existe une suite (c_n) vérifiant, pour tout $n \geq 0$, $(\ell - \varepsilon)b_n \leq c_n \leq (\ell + \varepsilon)$ et un polynôme Q tels que

$$f(x) = Q(x) + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$$

(b) En déduire que $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$.

PSI 2022-2023

Khôlles de Mathématiques - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`
Paul Valéry, Paris 12ème.

Planche de khôlles n°2

Semaine du 23/01

Question de cours

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \ln\left(1+\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) x^n$.

Exercice 1

Soit $\sum a_n z_n$ une série entière de rayon de convergence ρ. On pose $b_n = \dfrac{a_n}{1+|a_n|}$ et on considère la série entière $\sum b_n z^n$ dont on note le rayon de convergence R.

(1) Montrer que $R \geq \max(1, \rho)$.
(2) En distinguant les cas $\rho > 1$ et $\rho = 0$ et $0 < \rho \leq 1$, montrer qu'en fait $R = \max(1, \rho)$.

Exercice 2

On considère un entier strictement positif N et $X_1, X_2, ..., X_n$ des variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{U}(\llbracket 1, N \rrbracket)$. On pose alors

$$M_n = \max(X_1, ..., X_n)$$

(1) Que vaut $M_n(\Omega)$?
(2) Calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(M_n \leq k)$.
(3) Soit Y un v.a à valeurs dans $\llbracket 1; N \rrbracket$. Montrer que

$$E(Y) = \sum_{k=0}^{N-1} P(Y > k).$$

(4) Montrer alors que

$$E(M_n) = N - \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{k}{N}\right)^n.$$

(5) Vérifier que, pour tout $k \in \llbracket 0; N-1 \rrbracket$,

$$0 \leq \left(\frac{k}{N}\right)^n \leq N \int_{k/N}^{(k+1)/N} t^n \mathrm{d}t.$$

(6) En déduire que

$$N - \frac{N}{n+1} \leq E(M_n) \leq N$$

en déduire la valeur de

$$\lim_{n\to+\infty} E(M_n).$$

Planche de khôlles n°3

Semaine du 23/01

Question de cours

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{n!}{2^{2n}\sqrt{(2n)!}} x^n$.

Exercice 1

(1) Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $\rho > 0$. Montrer que $\sum (a_n/n!)x^n$ a pour rayon de convergence $+\infty$.

(2) On suppose maintenant que la série entière $\sum (a_n/n!)x^n$ a pour rayon de convergence $\rho > 0$. Que dire du rayon de convergence de $\sum a_n x^n$?

Exercice 2

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On considère une urne $\mathcal{U}$ contenant n boules numérotées de 1 à n et indiscernables au toucher.
On effectue une suite de tirages d'une boule avec remise de la boule dans l'urne $\mathcal{U}$.
Pour tout entier k supérieur ou égal à 1, on note Z_k la variable aléatoire égale au nombre de numéros distincts obtenus au cours des k premiers tirages et on note $E(Z_k)$ l'espérance de Z_k.

(1) Déterminer la loi de la variable Z_1 et la loi de la variable Z_2. En déduire $E(Z_1)$ et $E(Z_2)$.

(2) Soit k un entier supérieur ou égal à 1.
   (a) Déterminer $\mathrm{P}(Z_k = 1)$ et déterminer $\mathrm{P}(Z_k = k)$.
   (b) Montrer, pour tout $\ell \in [\![1, n]\!]$:
$$\mathrm{P}(Z_{k+1} = \ell) = \frac{\ell}{n}\mathrm{P}(Z_k = \ell) + \frac{n-\ell+1}{n}\mathrm{P}(Z_k = \ell - 1).$$
   (c) En déduire que
$$E(Z_{k+1}) = \frac{n-1}{n}E(Z_k) + 1.$$

(3) (a) Montrer que la suite $(v_k)_{k\geqslant 1}$ de terme général $v_k = E(Z_k) - n$ est une suite géométrique.
   (b) En déduire, pour tout entier k supérieur ou égal à 1,
$$E(Z_k) = n\left(1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^k\right).$$