PSI 2022-2023

Khôlles de Mathématiques - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`
Paul Valéry, Paris 12ème.

Planche de khôlles n°1

Semaine du 26/09

Question de cours

Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{k\geq 0}\left(\exp\left(\frac{k^2+1}{k^4+1}\right)-1\right)$.

Exercice 1

On considère une base (u_1, u_2, u_3, u_4) de $\mathbb{R}^4$ et on introduit les sous-espaces

$$F = \text{Vect}(u_1+u_2, u_3), \quad G = \text{Vect}(u_1+u_3, u_4) \quad \text{et} \quad H = \text{Vect}(u_1+u_4, u_2).$$

(1) Montrer $F \cap G = G \cap H = H \cap F = \{0\}$.
(2) La somme $F+G+H$ est-elle directe ?

Exercice 2

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{2n+2}{2n+5}u_n$.

(1) Montrer que (u_n) et décroissante. Montrer ensuite qu'elle converge vers une limite $\ell \in [0;1]$.

(2) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On introduit les suites, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_n = n^\alpha u_n, \quad \text{et} \quad w_n = \ln(v_{n+1}) - \ln(v_n).$$

(a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$w_n = (\alpha+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln\left(1+\frac{5}{2n}\right).$$

(b) En déduire l'existence d'une réel β (à exprimer en fonction de α tel que

$$w_n \sim \frac{2\alpha-3}{2n} + \frac{\beta}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad n \to +\infty.$$

(c) Montrer qu'il existe une unique valeur α_0 de α que l'on précisera pour laquelle la série $\sum w_n$ converge.

(d) Exprimer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} w_k$ en fonction de u_{n+1}.

(e) En déduire qu'il existe un réel strictement positif C tel que $u_n \sim \dfrac{C}{n^{\alpha_0}}, \quad n \to +\infty$.

(f) Quelle est alors la valeur de ℓ?

Planche de khôlles n°2

Semaine du 26/09

Question de cours

Déterminer une base de chacun des sous-espaces $E_\lambda(A) = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) : AX = \lambda X\}$ pour $\lambda = 1$ puis $\lambda = 2$, où

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Vérifier que $E_1(A) \oplus E_2(A) = \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Exercice 1

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer la convergence de la série de terme général u_n où

$$u_n = \frac{1}{n}\int_0^1 t^n f(t)\mathrm{d}t.$$

Exercice 2

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle telle que $A^2 = 0$ et $\mathrm{rg}(A) = r$. On note $(u_1, u_2, ..., u_r)$ une base de $\mathrm{Im}(A)$.

(1) Quelle est la dimension de Ker(A)?
(2) Montrer que Im(A) $\subset \mathrm{Ker}(A)$. En déduire que $n \geq 2r$.
(3) En déduire qu'il existe des vecteurs $v_1, v_2, ..., v_{n-2r}$ tels que $(u_1, ..., u_r, v_1, ..., v_{n-2r})$ forme une base de $\mathrm{Ker}(A)$.
(4) Montrer qu'il existe une matrice P inversible telle que

$$A = P\left(\begin{array}{c|c} 0 & I_r \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)P^{-1},$$

où I_r désigne la matrice identité de taille r.

Exercice 3

(1) Déterminer, à l'aide d'une comparaison série/intégrale, un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}$.
(2) En déduire l'ensemble des valeurs α pour lesquelles la série de terme général u_n converge, où

$$u_n = \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+...+\sqrt{n}}{n^\alpha}.$$

PSI 2022-2023

Khôlles de Mathématiques - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`
Paul Valéry, Paris 12ème.

Planche de khôlles n°3

Semaine du 26/09

Question de cours

Déterminer la nature de la série $\sum_{k\geq 1}\left(1-\left(1+\frac{1}{k^2}\right)^k\right)$.

Exercice 1

On considère la série de terme général

$$u_n = \frac{n^3+2n^2-4n+1}{n!}, \qquad n \in \mathbb{N}^*.$$

(1) Justifier que $(1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2))$ forme une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
(2) Déterminer les coordonnées de X^3+2X^2-4X+1 dans cette nouvelle base.
(3) Conclure quant à la convergence de $\sum u_n$ et calculer sa somme.

Exercice 2

Déterminer la nature de la série $\sum u_n$ où

$$u_n = \frac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}{\ln(n!)}, \qquad n \geq 1.$$

Exercice 3

Soient E un espace vectoriel et f un endomorphisme de E vérifiant

$$f^2+2f-3\mathrm{id}_E = 0.$$

(1) Montrer que f est un automorphisme et déterminer f^{-1} en fonction de f.
(2) Montrer que

$$\mathrm{Im}(f+3\mathrm{id}_E) \subset \mathrm{Ker}(f-\mathrm{id}_E) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(f-\mathrm{id}_E) \subset \mathrm{Ker}(f+3\mathrm{id}_E).$$

Justifier que tous ces sous-espaces sont stables sous l'action de f.
(3) Déterminer deux réels α et β tels que

$$\forall x \in E, \qquad x = \alpha(f(x)-x)+\beta(f(x)+3x).$$

(4) En déduire que $E = \mathrm{Ker}(f+3\mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(f-\mathrm{id}_E)$.