PSI 2022-2023

Khôlles de Mathématiques - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`
Paul Valéry, Paris 12ème.

Planche de khôlles n°1

Semaine du 26/09

Question de cours

Étant clair que $\dfrac{k^2+1}{k^4+1} \sim \dfrac{1}{k^2} \longrightarrow 0,\ k \to +\infty$, on peut utiliser l'équivalent usuel $e^u - 1 \sim u,\ u \to 0$ avec $u = \dfrac{k^2+1}{k^4+1}$, ce qui donne

$$\exp\left(\frac{k^2+1}{k^4+1}\right) - 1 \sim \frac{k^2+1}{k^4+1} \sim \frac{1}{k^2}$$

Or, la série de terme général $1/k^2$ est convergente (Riemann). Comme tout est positif ici, le critère d'équivalence pour les séries à termes positifs permet de conclure que la série $\displaystyle\sum_{k\geq 0}\left(\exp\left(\frac{k^2+1}{k^4+1}\right) - 1\right)$ converge.

Exercice 1

On considère une base (u_1, u_2, u_3, u_4) de $\mathbb{R}^4$ et on introduit les sous-espaces

$$F = \mathrm{Vect}(u_1+u_2, u_3), \quad G = \mathrm{Vect}(u_1+u_3, u_4) \quad \text{et} \quad H = \mathrm{Vect}(u_1+u_4, u_2).$$

(1) Soit $v \in F \cap G$. Comme $v \in F$, il existe deux réels α, β tels que $v = \alpha(u_1+u_2) + \beta u_3$. Mais comme $v \in G$, il existe aussi deux réels γ, δ tels que $v = \gamma(u_1+u_3) + \delta u_4$. En faisant la différence de ces deux égalités, on a

$$0 = \alpha(u_1+u_2) + \beta u_3 - \gamma(u_1+u_3) + \delta u_4 \Longleftrightarrow (\alpha-\gamma)u_2 + \alpha u_2 + (\beta-\gamma)u_3 + \delta u_4 = 0$$

Or la famille (u_1, u_2, u_3, u_4) forme une base de l'espace et est donc en particulier **libre**. Ce qui impose que

$$\left\{\begin{array}{rcl} \alpha-\gamma & = & 0 \\ \alpha & = & 0 \\ \beta-\gamma & = & 0 \\ \delta & = & 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$$

et $v = 0$ ce qui prouve que l'intersection des deux sous-espaces est bien réduite au vecteur nul. On procède de la même manière pour les deux autres intersections.

(2) On serait tentés de dire oui pensant naïvement que, comme pour deux sous-espaces, des intersections deux à deux réduites au vecteur nul devraient suffire. Ce n'est nullement le cas, cela ne

se passe pas comme cela lorsqu'il y a plus de deux sous-espaces. Il suffit pour s'en convaincre d'exhiber un vecteurs qui va se décomposer de deux manières différentes. Par exemple,

$$u_1 = \underbrace{u_1 + u_2}_{\in F} + \underbrace{0}_{\in G} + \underbrace{(-u_2)}_{\in H} = \underbrace{-u_3}_{\in F} + \underbrace{u_1 + u_3}_{\in G} + \underbrace{0}_{\in H}$$

et la somme n'est donc pas directe.

Exercice 2

On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 1, \qquad u_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+5} u_n.$$

(1) On commence par montrer, par récurrence immédiate que $u_n > 0$ pour tout n. C'est vrai pour $n = 0$ et si c'est vrai pour un certain $n \in \mathbb{N}$, le produit de quantités strictement positives le restant, c'est encore vrai au rang $n+1$. Ensuite, on observe que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n+2}{2n+5} \leq \frac{2n+5}{2n+5} = 1$$

et donc $u_{n+1} \leq u_n$. Ainsi, (u_n) est bien décroissante. Il suit que $u_n \leq u_1 = 1$. On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0; 1]$. Comme la suite est décroissante et minorée par 0, le théorème de convergence monotone permet d'affirmer que (u_n) converge vers une limite ℓ. De l'encadrement sur les termes de la suite ci-dessus obtenus, on peut conclure que $\ell \in [0; 1]$. (*Le passage à la limite transforme les inégalités en inégalités larges.*)

(2) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On introduit les suites, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_n = n^\alpha u_n, \quad \text{et} \quad w_n = \ln(v_{n+1}) - \ln(v_n).$$

(a) C'est un calcul, utilisant les propriétés du log. Sans difficulté.

$$\begin{aligned} w_n &= \ln\left((n+1)^\alpha u_{n+1}\right) - \ln\left(n^\alpha u_n\right) \\ &= \alpha \ln(n+1) + \ln(2) + \ln((n+1)) + \ln(u_n) - \ln(2n+5) - \alpha \ln(n) - \ln(u_n) \\ &= \alpha \ln(n+1) + \ln((n+1)) - \ln(n + 5/2) - \alpha \ln(n) \\ &= \alpha \ln(n+1) + \ln((n+1)) - \ln\left(1 + \frac{5}{2n}\right) - \alpha \ln(n) - \ln(n) \\ &= (\alpha+1) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{5}{2n}\right) \end{aligned}$$

(b) On rappelle que, pour $u \to 0$,

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2), \qquad u \to 0.$$

Comme

$$\frac{1}{n} \to 0 \quad \text{et} \quad \frac{5}{2n} \to 0, \quad n \to +\infty,$$

on a

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad \ln\left(1 + \frac{5}{2n}\right) = \frac{5}{2n} - \frac{25}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Il suit que

$$\begin{aligned} w_n &= (\alpha+1)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \left(\frac{5}{2n} - \frac{25}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= \frac{2\alpha - 3}{n} + \frac{21 - 4\alpha}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

et on a bien la formule attendue en posant

$$\beta = \frac{21 - 4\alpha}{8}.$$

(c) Pour $\alpha \neq 3/2$, $2\alpha - 3 \neq 0$ et donc

$$w_n \sim \frac{2\alpha - 3}{n},\ n \to +\infty.$$

Par critère d'équivalence pour les séries, comme $\sum \frac{2\alpha-3}{n}$ diverge (multiplie de la série harmonique), il suit que $\sum w_n$ diverge. En revanche, si $\alpha = 3/2$, alors $\beta \neq 0$ et

$$w_n \sim \frac{\beta}{n^2},\ n \to +\infty.$$

Cette fois, par convergence de la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$, le critère d'équivalence affirme que $\sum w_n$ converge. On a donc bien

$$\sum w_n \text{ converge } \iff \alpha = \alpha_0 = \frac{3}{2}.$$

(d) On reconnait une somme télescopique. En effet

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} w_k &= \sum_{k=1}^{n} (\ln(v_{k+1} - \ln(v_k)) \\
&= \ln(v_{n+1}) - \ln(v_1) \qquad \text{(par telescopage)} \\
&= \ln\left((n+1)^{\alpha_0} u_{n+1}\right) - \ln\left(2^{\alpha_0} \cdot (2/5)\right.
\end{aligned}$$

(e) D'après la question précédente,

$$\ln\left(n^{\alpha_0} u_n\right) = \sum_{k=1}^{n-1} + \ln(v_1).$$

Comme la série $\sum w_n$ converge, en notant S sa somme, on a

$$\lim_{n \to +\infty} \ln\left(n^{\alpha_0} u_n\right) = S + \ln(v_1).$$

En notant alors $C = \exp(S + \ln(v_1))$, on a bien

$$\frac{n^{\alpha_0} u_n}{C} \longrightarrow 1 \iff u_n \sim \frac{C}{n^{\alpha_0}}.$$

(f) On a, en particulier, que

$$\ell = \lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{C}{n^{3/2}} = 0.$$

Planche de khôlles n°2

Semaine du 26/09

Question de cours

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a

$$\begin{aligned} X \in E_1(A) &\iff AX = X \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} 2x - y - 2z &=& x \\ 2x - y - 4z &=& y \\ -x + y + 3z &=& z \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x - y - 2z &=& 0 \\ 2x - 2y - 4z &=& 0 \\ -x + y + 2z &=& 0 \end{array} \right. \\ &\iff x = y + 2z \\ &\iff X = \begin{pmatrix} y + 2z \\ y \\ z \end{pmatrix} = yV + zW, \end{aligned}$$

où on a posé

$$V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Donc $E_1(A) = \mathrm{Vect}(V, W)$ et la famille (V, W) est génératrice de $E_1(A)$. De plus, cette famille est clairement libre car composée de deux vecteurs non colinéaires, elle en forme donc une base.

Avec la même méthode. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a

$$\begin{aligned} X \in E_2(A) &\iff AX = 2X \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} 2x - y - 2z &=& 2x \\ 2x - y - 4z &=& 2y \\ -x + y + 3z &=& 2z \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} -y - 2z &=& 0 \\ 2x - 3y - 4z &=& 0 \\ -x + y + z &=& 0 \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} -x + y + z &=& 0 \\ -y - 2z &=& 0 \\ -y - 2z &=& 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x &=& y + z = -z \\ y &=& -2z \end{array} \right. \\ &\iff X = \begin{pmatrix} -z \\ -2z \\ z \end{pmatrix} = -zU, \end{aligned}$$

où on a posé
$$U = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$
Donc $E_2(A) = \mathrm{Vect}(U)$. De plus,cette famille est libre car composée d'un seul vecteur non nul et forme donc une base de $E_2(A)$.

En montrant que (U, V, W) forme une famille libre de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on montre que l'intersection de ces deux sous-espaces est réduite au vecteur nul. La dimension de la somme directe est alors égale à la somme des dimensions qui vaut 3 ce qui correspond à l'espace tout entier et il y a donc égalité $E_1(A) \oplus E_2(A) = \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On montre donc que la famille est libre.

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On a :
$$\begin{aligned} aU + bV + cW = 0 &\iff \begin{pmatrix} a+b+2c \\ 2a+b \\ -a+c \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff \begin{cases} a+b+2c &= 0 \\ 2a+b &= 0 \\ -a+c &= 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a &= 0 \\ b &= -2a \\ c &= a \end{cases} \iff a = b = c = 0 \end{aligned}$$
Donc la famille $\mathcal{B}' = (U, V, W)$ est une famille libre.

Exercice 1

Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes (résultat crucial du cours de première année). Ainsi,
$$\exists M \geq 0, \quad \forall t \in [0, 1], \qquad |f(t)| \leq M.$$
Par inégalité triangulaire, on a donc
$$|u_n| \leq \frac{1}{n} \int_0^1 |f(t)| t^n \mathrm{d}t \leq \frac{M}{n} \int_0^1 t^n \mathrm{d}t = \frac{M}{n(n+1)}$$
Or,
$$\frac{M}{n(n+1)} \sim \frac{M}{n^2}, \quad n \to +\infty$$
et la série de terme général M/n^2 converge (multiple de Riemann convergente). Par équivalence (pour SATP), la série de terme général $M/(n(n+1))$ converge, puis par comparaison (toujours pour des SATP), la série $\sum |u_n|$ converge. Comme notre série converge absolument, elle converge aussi simplement.

Exercice 3

(1) On obtient sans difficulté avec une comparaison série/intégrale
$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \sim \frac{2}{3} n \sqrt{n}.$$

(2) Il suit que
$$u_n \sim \frac{2}{3n^{\alpha - \frac{3}{2}}}$$
et par critère d'équivalence pour SATP et critère de Riemann cette série converge si et seulement si $\alpha - 3/2 > 1$ ou encore si et seulement si $\alpha > 5/2$.

PSI 2022-2023

Khôlles de Mathématiques - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`
Paul Valéry, Paris 12ème.

Planche de khôlles n°3

Semaine du 26/09

Question de cours

On commence à passer à la forme exponentielle pour la puissance

$$\left(1+\frac{1}{k^2}\right)^k = \exp\left(k\ln\left(1+\frac{1}{k^2}\right)\right) = \exp\left(k\left(\frac{1}{k^2}+o\left(\frac{1}{k^2}\right)\right)\right) = \exp\left(k\ln\left(1+\frac{1}{k^2}\right)\right) = \exp\left(\frac{1}{k}+o\left(\frac{1}{k}\right)\right)$$

Comme $\frac{1}{k}+o\left(\frac{1}{k}\right) \to 0$ (lorsque $k \to +\infty$), on peut utiliser l'équivalent en 0

$$1-e^u \sim -u, \quad u \to 0 \qquad \text{avec} \qquad u = k\ln\left(1+\frac{1}{k^2}\right)$$

Il suit que

$$\left(1-\left(1+\frac{1}{k^2}\right)^k\right) \sim -k\ln\left(1+\frac{1}{k^2}\right) \sim -\frac{1}{k}$$

Comme la série de terme général $-1/k$ diverge (série harmonique), le critère d'équivalence pour les séries à termes tous **négatifs** permet de conclure que notre série diverge également.

Exercice 1

On considère la série de terme général

$$u_n = \frac{n^3+2n^2-4n+1}{n!}, \qquad n \in \mathbb{N}^*.$$

(1) Les degrés sont échelonnés, le cardinal de la famille est celui de la dimension de l'espace.
(2) C'est un système facile qu'on laisse au lecteur.
(3) En utilisant la question précédente, on peut écrire u_n comme combinaison (pour $n \geq 3$) de termes généraux de séries exponentielles (de paramètre 1) décalées. En effet,

$$\frac{n}{n!} = \frac{1}{(n-1)!}, \qquad \frac{n(n-1)}{n!} = \frac{1}{(n-2)!}, \qquad \frac{n(n-1)(n-2)}{n!} = \frac{1}{(n-3)!}$$

La série est donc convergente et la somme se calcule sans difficulté utilisant que

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n-1)!} = \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{(n-2)!} = \sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{(n-3)!} = e.$$

Exercice 2

Il est classique et doit être facile de montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \ln(n+1).$$

Par ailleurs,

$$\ln(n!) = \sum_{k=1}^{n} \ln(k) \leq \sum_{k=1}^{n} \ln(n) = n\ln(n)$$

Ainsi,

$$u_n \geq \frac{\ln(n+1)}{n\ln(n)} \sim \frac{1}{n}$$

et par comparaison(s) de SATP, la série $\sum u_n$ diverge.