PSI 2022-2023

Khôlles de Mathématiques - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`
Paul Valéry, Paris 12ème.

Planche de khôlles n°1

Semaine du 28/11

Question de cours

Soient E un espace vectoriel euclidien de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que F est supplémentaire à son orthogonal.

Exercice 1

Soit $E = \mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire canonique et on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ sa base canonique. On considère le sous-espace vectoriel

$$F = \left\{ u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : \left\{ \begin{array}{ccc} x + y & = & 0 \\ z + t & = & 0 \end{array} \right. \right\}$$

(1) Déterminer une base orthonormale de F.
(2) Déterminer la matrice, dans $\mathcal{B}$, de la projection orthogonale sur F.
(3) Soit $u \in E$ un élément quelconque. Déterminer la distance de u à F.

Exercice 2

Une urne contient des boules vertes et des boules blanches, indiscernables au toucher. La proportion de boules vertes est p, $0 < p < 1$; la proportion de boules blanches est $1 - p$. On effectue une suite de tirages successifs d'une boule avec remise.

On note N_V la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir la première boule verte, et N_B la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir la première boule blanche.

(1) Quelles sont les lois des variables aléatoires N_V et N_B ? Rappeler la valeur de leurs espérances.

On définit la variable aléatoire X qui prend la valeur i si et seulement si les i premières boules tirées sont de la même couleur et la $(i+1)-$ième est de l'autre couleur.

(2) Déterminer la loi de la variable aléatoire X.
(3) Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance et que

$$E(X) = \frac{p}{1-p} + \frac{1-p}{p}.$$

(4) Montrer que $E(X)$ est minimale lorsque $p = \frac{1}{2}$, et calculer cette valeur minimale.

PSI 2022-2023

Khôlles de Mathématiques - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`
Paul Valéry, Paris 12ème.

Planche de khôlles n°2

Semaine du 28/11

Question de cours

Deux ami.e.s s'affrontent en parallèle et indépendamment l'un.e de l'autre à une épreuve physique. Chaque tentative pour un.e même concurrent.e est indépendante des autres et est réussie avec une certaine probabilité p et chaque tentative dure une minute. Déterminer la probabilité que les deux ami.e.s réussissent l'épreuve en même temps.

Exercice 1

Pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(A\,{}^tB)$.

(1) Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(2) En déduire que, pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(R)$ symétriques, on a
$$\mathrm{tr}(AB)^2 \leq \mathrm{tr}(A^2)\mathrm{tr}(B^2)$$

(3) On pose $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},\ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

   (a) Déterminer une base orthonormée de $F^\perp$

   (b) Calculer la projection de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $F^\perp$.

Exercice 2

Calculer $\displaystyle\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (x^2 - ax - b)^2 \mathrm{d}x$.

PSI 2022-2023

Khôlles de Mathématiques - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`
Paul Valéry, Paris 12ème.

Planche de khôlles n°3

Semaine du 28/11

Question de cours

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}$.

(1) Montrer que l'application $\varphi : (u, v) \mapsto^t XMY$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$ (où X et Y représentent respectivement les vecteurs colonnes des coordonnées de u et v dans la base canonique).

(2) À l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée à un v bien choisi, montrer que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad (x + 4y)^2 \leq 2\left(x^2 + 6xy + 10y^2\right)$$

Exercice 1

On considère l'espace $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique. On introduit l'endomorphisme p dont la matrice dans la base canonique de E est donnée par

$$A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

(1) Démontrer que p est une projection orthogonale sur un plan dont on précisera l'équation.

(2) Déterminer la distance de $(1, 1, 1)$ à ce plan.

Exercice 2

On considère l'ensemble $E = \{P \in \mathbb{R}[X] : \; P(0) = P(1) = 0\}$.

(1) Montrer que E est un espace vectoriel.

(2) Montrer que l'application φ définie sur $E \times E$ par $\varphi(P, Q) = -\displaystyle\int_0^1 P(t)Q''(t)\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur E.

(3) On considère le sous-espace $F = E \cap \mathbb{R}_3[X]$.
   (a) Déterminer une base de F.
   (b) Déterminer une base de F, orthonormée pour φ, construite par le procédé de Gram-Schmidt à partir de la base précédente.