PSI 2022-2023

Khôlles de Mathématiques - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`
Paul Valéry, Paris 12ème.

Planche de khôlles n°1

Semaine du 28/11

Question de cours

Cette question est traitée en détail dans le cours, on renvoie donc à sa lecture.

Exercice 1

Soit $E = \mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire canonique et on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ sa base canonique. On considère le sous-espace vectoriel

$$F = \left\{ u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : \left\{ \begin{array}{rcl} x + y & = & 0 \\ z + t & = & 0 \end{array} \right. \right\}$$

(1) On commence par trouver une base de F avant de l'orthonormaliser. Il est clair que

$$F = \mathrm{Vect}((1, -1, 0, 0);\ (0, 0, 1, -1)) =: \mathrm{Vect}(u, v).$$

Ici, les deux vecteurs u et v ont le bon gout d'être déjà orthogonaux. Il suffit donc de les normaliser pour obtenir une base orthonormale

$$\epsilon_1 = \frac{u}{||u||} = \frac{1}{\sqrt{2}} u, \qquad \epsilon_2 = \frac{v}{||v||} = \frac{1}{\sqrt{2}} v.$$

(2) Il faut commencer par calculer les images par cette projection orthogonale des quatre vecteurs de la base canonique

$$\begin{array}{rcl} p_F(e_1) & = & \langle e_1, \epsilon_1 \rangle \epsilon_1 + \langle e_1, \epsilon_2 \rangle \epsilon_2 \\ & = & \frac{1}{\sqrt{2}} \epsilon_1 = \frac{1}{2}(e_1 - e_2) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} p_F(e_2) & = & \langle e_2, \epsilon_1 \rangle \epsilon_1 + \langle e_2, \epsilon_2 \rangle \epsilon_2 \\ & = & -\frac{1}{\sqrt{2}} \epsilon_1 = \frac{1}{2}(e_2 - e_1) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} p_F(e_3) & = & \langle e_3, \epsilon_1 \rangle \epsilon_1 + \langle e_3, \epsilon_2 \rangle \epsilon_2 \\ & = & \frac{1}{\sqrt{2}} \epsilon_2 = \frac{1}{2}(e_3 - e_4) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} p_F(e_4) & = & \langle e_4, \epsilon_1 \rangle \epsilon_1 + \langle e_4, \epsilon_2 \rangle \epsilon_2 \\ & = & -\frac{1}{\sqrt{2}} \epsilon_2 = \frac{1}{2}(e_4 - e_3) \end{array}$$

On peut alors écrire

$$\mathrm{Mat}(p_F, \mathcal{B}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(3) Soit $u = (x, y, z, t) \in E$ un élément quelconque. D'après le cours

$$\mathrm{dist}(u, F) = ||u - p_F(u)|| = \left\| (x, y, z, t) - \frac{1}{2}(x - y, y - x, z - t, t - z) \right\|$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned} \mathrm{dist}(u, F) &= \sqrt{(x/2 + y/2)^2 + (y/2 + x/2)^2 + (z/2 + t/2)^2 + (t/2 + z/2)^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2}\left((x + y)^2 + (z + t)^2\right)} \end{aligned}$$

Planche de khôlles n°2

Semaine du 28/11

Question de cours

Il suffit d'introduire deux variables aléatoires X_1 et X_2 qui prennent respectivement pour valeurs le nombre de tentatives nécessaires pour la réussite de chaque ami.e.
D'après les conditions de l'énoncé, ces deux variables sont indépendantes et suivent toutes deux une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. La probabilité cherchée est alors

$$\begin{aligned}
P(X_1 = X_2) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P([X_1 = X_2] \cap X_1 = k) && \text{(FPT avec s.c.e } \{[X = k] : \ k \in \mathbb{N}^*\}) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} P(X_2 = k \cap X_1 = k) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} P(X_2 = k)P(X_1 = k) && \text{(par indépendance des variables)} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} p(1-p)^{k-1}p(1-p)^{k-1} \\
&= p^2 \sum_{j=0}^{+\infty} \left((1-p)^2\right)^j = \frac{p-2}{1-(1-p)^2} \\
&= \frac{p}{2-p}.
\end{aligned}$$

Exercice 1

(1) Montrons que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

- On sait que la trace est invariante par transposition et que ${}^t(A^tB) = B^tA$. Il suit que
$$\langle B, A\rangle = \mathrm{tr}(B^tA) = \mathrm{tr}\left({}^t(A^tB)\right) = \mathrm{tr}(A^tB) = \langle A, B\rangle$$
et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est symétrique.

- Soient $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On a, par linéarité de la trace,
$$\begin{aligned}
\langle \alpha A + C, B\rangle &= \mathrm{tr}\left((\alpha A + C)^tB\right) = \mathrm{tr}(\alpha A^tB + C^tB) \\
&= \alpha \mathrm{tr}(A^tB) + \mathrm{tr}(C^tB) \\
&= \alpha\langle A, B\rangle + \langle C, B\rangle
\end{aligned}$$

et $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est linéaire à gauche. Étant symétrique, elle est aussi linéaire à droite.

- Si $A=(a_{i,j})_{i,j\in[\![1,n]\!]}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors $A^tA=\left(\sum_{k=1}^n a_{i,k}a_{j,k}\right)_{i,j\in[\![1,n]\!]}$ et donc
$$\langle A,A\rangle=\mathrm{tr}(A^tA)=\sum_{i=1}^n\left(\sum_{k=1}^n a_{i,k}^2\right)\geq 0$$
donc $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est bien positive.

- Du calcul précédent, on déduit aussi immédiatement que
$$0=\langle A,A\rangle=\sum_{i=1}^n\left(\sum_{k=1}^n a_{i,k}^2\right)\iff\left(\forall i,j\in[\![1,n]\!],\ a_{i,j}^2=0\right)\iff A=0$$
donc $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est aussi définie.

On a bien montré que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ était un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(2) Soient $A,B\in\mathcal{M}_n(R)$ symétriques. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a
$$\langle A,B\rangle^2\leq\langle A,A\rangle\langle B,B\rangle.$$
Or, A et B étant symétriques, ${}^tA=A$ et ${}^B=B$, ce qui donne bien
$$\mathrm{tr}(AB)^2\leq\mathrm{tr}(A^2)\mathrm{tr}(B^2).$$

(3) On pose $F=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\-b&a\end{pmatrix},\ (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$.

(a) Il faut commencer par déterminer une base de $F^\perp$.
$$\begin{aligned}M=\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix}\in F^\perp&\iff\left\langle M,\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right\rangle=0\quad\text{et}\quad\left\langle M,\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\right\rangle=0\\&\iff\left\{\begin{array}{rcl}x+t&=&0\\-y+z&=&0\end{array}\right.\\&=\quad M=\begin{pmatrix}x&y\\y&-x\end{pmatrix}\end{aligned}$$
Donc
$$F^\perp=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right)=:\mathrm{Vect}(M_1,M_2).$$
Comme les deux matrices ont le bon gout d'etre déjà orthogonales ($M_1\perp M_2$), il suffit de les normaliser pour avoir la base cherchée que l'on note (M_1',M_2') :
$$M_1'=\frac{M_1}{||M_1||}=\frac{1}{\sqrt{2}}M_1,\qquad M_2'=\frac{M_2}{||M_2||}=\frac{1}{\sqrt{2}}M_2.$$

(b) D'après la formule du cours
$$\begin{aligned}p_{F^\perp}(J)&=\langle J,M_1'\rangle M_1'+\langle J,M_2'\rangle M_2'\\&=0+\frac{2}{\sqrt{2}}M_2'=M_2\\&=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

PSI 2022-2023

Khôlles de Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
Paul Valéry, Paris 12ème.

Planche de khôlles n°3

Semaine du 28/11

Question de cours

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}$.

(1) Montrons que φ est un produit scalaire.

- Comme M est symétrique, il est immédiat que φ est symétrique.
- La linéarité à droite est immédiate également (c'est celle du produit matriciel) et par symétrie, φ est aussi linéaire à gauche.
- Soit u de coordonnées $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Alors

$$\begin{aligned} \varphi(u,u) &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x+3y \\ 3x+10y \end{pmatrix} \\ &= x(x+3y)+y(3x+10y) = x^2+6xy+10y^2 \\ &= (x+3y)^2+9y^2 \geq 0 \end{aligned}$$

  donc φ est positive.

- Du calcul précédent, on déduit,

$$\begin{aligned} \varphi(u,u)=0 &\iff (x+3y)^2+9y^2=0 \\ &\iff (x+3y)^2=0 \quad \text{et} \quad 9y^2=0 \\ &\iff x=y=0 \\ &\iff u=0 \end{aligned}$$

  et φ est bien définie.

On a bien montré que φ était un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

(2) D'après les calculs précédents, en notant $u=(x,y)$ et $v=(a,b)$, on a, par Cauchy-Schwarz,

$$(x(a+3b)+y(3a+10b))^2 = \varphi(u,v) \leq \varphi(u,u)\varphi(v,v) = \left(x^2+6xy+10y^2\right)\left(a^2+6ab+10b^2\right).$$

En choisissant v de sorte que $a+3b=1$ et $3a+10b=4$, ce qui donne $b=1$, $a=-2$ puis $a^2+6ab+10b^2=2$, on obtient bien
$$(x+4y)^2 \leq 2\left(x^2+6xy+10y^2\right).$$

Exercice 1

On considère l'espace $E=\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique. On introduit l'endomorphisme p dont la matrice dans la base canonique de E est donnée par
$$A=\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

(1) On commence par vérifier que p est une projection en vérifiant que $p\circ p=p$ ce qu'on vérifie sur la matrice. Le calcul donne $A^2=A$. Ensuite, il reste à montrer que cette projection est orthogonale. On va donc montrer que $\ker(p)\perp \mathrm{Im}(p)$. La résolution donne
$$\ker(p)=\mathrm{Vect}((-1,-2,1)) =: \mathrm{Vect}(u)$$
Il en découle que le rang de p vaut 2. Les deux premières colonnes étant libres, on les prend pour base de l'image de p
$$\mathrm{Im}(p)=\mathrm{Vect}((5,-2,1);\ (-2,2,2)) =: \mathrm{Vect}(v,w).$$
Étant immédiat que $u\perp v$ et $u\perp w$, on peut conclure que $\ker(p)\perp \mathrm{Im}(p)$ et la projection est bien orthogonale.
Le vecteur u étant normal au plan $\mathrm{Im}(p)$, une équation du plan est alors donnée par
$$\mathrm{Im}(p)=\{(x,y,z):\ -x-2y+z=0\}$$

(2) D'après la formule du cours
$$\mathrm{dist}((1,1,1),\mathrm{Im}(p)) = ||(1,1,1)-p(1,1,1)|| = ||(1/3,2/3,-1/3)|| = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Exercice 2

On considère l'ensemble
$$E=\{P\in\mathbb{R}[X]:\ P(0)=P(1)=0\}$$

(1) On montre que E est un e-v en montrant que c'est un s-ev e $\mathbb{R}[X]$ en montrant pour cela qu'il est non vide et stable par combinaison linéaire:

- Le polynôme nul est clairement élément de E donc $E\neq\emptyset$.
- Si $P,Q\in E$, et $\lambda\in\mathbb{R}$, alors
$$(\lambda P+Q)(0)=\lambda P(0)+Q(0)=0=\lambda P(1)+Q(1)=(\lambda P+Q)(1)$$
donc $\lambda P+Q\in E$ qui est bien un espace vectoriel.

(2) Commençons par observer que, par Intégration par parties (IPP), on a, pour tous $P,Q\in E$
$$\varphi(P,Q)=-[PQ']_0^1+\int_0^1 P'(t)Q'(t)\mathrm{d}t=\int_0^1 P'(t)Q'(t)\mathrm{d}t$$
car $P(0)=Q(0)=1$. Ainsi, il est assez immédiat que φ est symétrique. Par linéarité de l'intégrale, elle est clairement d'après la définition linéaire à gauche et par symétrie, linéaire à droite. De plus,
$$\varphi(P,P)=\int_0^1 P'(t)^2\mathrm{d}t\geq 0$$

par positivité de l'intégrale. De plus, par continuité et positivité de $t \mapsto P'(t)^2$ (sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0;1]$)

$$\varphi(P,P) = 0 \Longleftrightarrow \int_0^1 P'(t)^2 \mathrm{d}t = 0 \Longleftrightarrow \forall t \in [0;1], \quad P'(t) = 0.$$

Or P' est un polynôme. Le fait que la fonction soit nulle sur $[0;1]$ implique qu'elle est identiquement nulle. Ce qui implique que P est un polynôme constant. Mais $P(0) = 0$ donne alors que P est identiquement nul. La réciproque est immédiate. Ainsi, φ est également définie et c'est bien un produit scalaire sur E.

(3) On considère le sous-espace $F = E \cap \mathbb{R}_3[X]$.

(a) Soit $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$. On peut écrire

$$\begin{aligned} P \in F &\Longleftrightarrow P(0) = P(1) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} d &=& 0 \\ a+b+c &=& 0 \end{array} \right. \\ &\Longleftrightarrow P = a(X^3 - X) + b(X^2 - X) \end{aligned}$$

ou encore

$$F = \mathrm{Vect}(X^3 - X;\ X^2 - X)$$

Les deux vecteurs ci-dessus forment donc une famille génératrice de F. Etant clairement non colinéaires (degrés différents et non nuls), la famille est libre et forme alors une base de F.

(b) On note $P_1 = X^2 - X$ et $P_2 = X^3 - X$. On cherche une famille (R_1, R_2) orthonormée pour φ construite à partir de (P_1, P_2).

Pour R_1, on prend

$$R_1 = \frac{P_1}{||P_1||} = \sqrt{\frac{1}{3}}(X^2 - X).$$

Pour R_2, on commence par chercher R_2' de la forme $R_2' = P_2 + \alpha R_1$ avec α tel que $\varphi(R_2', R_1) = 0$, c'est à dire

$$\alpha = -\varphi(P_2, R_1) = 2\sqrt{\frac{1}{3}} \int_0^1 (t^3 - t)\mathrm{d}t = -\frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

Ensuite, on normalise

$$R_2 = \frac{R_2'}{||R_2'||}$$

et le calcul est... long.