DS5 - CB2 - Un corrigé - J-48
Mercredi 01 Mars 2023

Exercice 1

Partie 1 : Réduction d'une matrice carrée

On considère la matrice carrée $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

1. **On exécute le script Python ci-dessous dont le résultat est donné en suivant :**

```
import numpy as np ; import numpy.linalg as al
A = np.array( [[2,-2,2],[1,1,2],[-2,0,-3]] )
>>> print( al.matrix_power(A,3) )
array([[ 2, -2,  2],
       [ 1,  1,  2],
       [-2,  0, -3]])
```

   (a) **Déduire de l'affichage Python un polynôme annulateur de** A.
   La commande `al.matrix_power(A,3)` calcule A^3 et on remarque alors que $A^3 = A$.
   On a donc $A^3 - A = 0$ et ainsi le polynôme $P(X) = X^3 - X$ est un polynôme annulateur de A.

   (b) **Quelles sont alors les seules valeurs propres possibles de** A**?**
   Les seules valeurs propres possibles de A sont parmi les racines du polynôme annulateur P. Or, on a :

$$P(X) = 0 \iff X^3 - X = 0 \iff X(X^2-1) = 0 \iff X(X-1)(X+1) = 0$$

   Ainsi, les racines de P sont $\{-1, 0, 1\}$ donc les seules valeurs propres possibles de A sont $\{-1, 0, 1\}$: $Sp(A) \subset \{-1, 0, 1\}$.

2. **On exécute les commandes ci-dessous dont les résultats sont donnés en suivant :**

```
V = np.array( [[3],[1],[-2]] )
>>> print( np.dot(A,V) )
array([[0],
       [0],
       [0]])
>>> print( al.matrix_rank(A+np.eye(3)) )
2
>>> print( al.matrix_rank(A-np.eye(3)) )
2
```

   (a) **Déduire de cette séquence Python que** $Sp(A) = \{-1, 0, 1\}$**. On justifiera rigoureusement.**

   - La première commande montre que $AV = 0$ avec $V = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Comme $V \neq 0$, on en déduit que 0 est valeur propre de A.
   - La deuxième commande montre que $\text{rg}(A+I) = 2 < 3$ donc la matrice $(A+I)$ est non inversible ce qui montre que -1 est valeur propre de A.
   - La troisième commande montre que $\text{rg}(A-I) = 2 < 3$ donc la matrice $(A-I)$ est non inversible ce qui montre que 1 est valeur propre de A.

   Ainsi, les 3 valeurs propres possibles sont des valeurs propres donc on a : $Sp(A) = \{-1, 0, 1\}$.

   (b) **En déduire, sans calcul, que le sous-espace propre** $E_0(A)$ **est :** $E_0(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$.
   Comme $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ admet trois valeurs propres distinctes, chaque sous-espace propre est de dimension 1. En particulier, $\dim(E_0(A)) = 1$. Or, on a vu que $V = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 0. Comme $V \neq 0$, il forme une base de $E_0(A)$ donc $E_0(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$.

   (c) **La matrice** A **est-elle diagonalisable?** La matrice A appartient à $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et admet trois valeurs propres distinctes donc elle est diagonalisable.

3. **Déterminer une base des sous-espace propres** $E_{-}1(A)$ **et** $E_1(A)$**.**

   - Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$X \in \text{Ker}(A+I) \iff (A+I)X = 0 \iff \begin{cases} 3x - 2y + 2z = 0 \\ x + 2y + 2z = 0 \\ -2x - 2z = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x + 2y + 2z = 0 & L_1 \leftrightarrow L_2 \\ 3x - 2y + 2z = 0 & L_1 \leftrightarrow L_2 \\ -2x - 2z = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x + 2y + 2z = 0 \\ -8y - 4z = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ 4y + 2z = 0 & L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x = 2y \\ z = -2y \\ 0 = 0 & L_3 \leftarrow 2L_3 + L_2 \end{cases}$$

   On a donc $\text{Ker}(A+I) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$.

   De plus, la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est libre (un seul vecteur non nul), donc c'est une base de $E_{-1}(A)$.

   - De même, on a :

$$X \in \text{Ker}(A-I) \iff \begin{cases} x - 2y + 2z = 0 \\ x + 2z = 0 \\ -2x - 4z = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x - 2y + 2z = 0 \\ x + 2z = 0 \\ 0 = 0 & L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} y = 0 \\ x = -2z \\ 0 = 0 & L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \end{cases}$$

On a donc $\operatorname{Ker}(A-I)=\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}\right)$.

De plus, la famille $\left(\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ est libre (un seul vecteur non nul), donc c'est une base de $E_1(A)$.

4. **Déterminer une matrice D diagonale dont les coefficients sont rangés dans l'ordre croissant et une matrice P inversible de première ligne $\begin{pmatrix}2 & 3 & -2\end{pmatrix}$ telles que : $A=PDP^{-1}$.**

Posons $U=\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$, $V=\begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix}$, $W=\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$. La famille (U,V,W) est libre par concaténation de familles libres de sous-espace propres différents. Comme elle contient 3 vecteurs propres de A et que $\dim\left(M_{3,1}(\mathbb{R})\right)=3$, on en déduit que c'est est une base de $M_{3,1}(\mathbb{R})$.

Soit $P=\begin{pmatrix}2 & 3 & -2\\1 & 1 & 0\\-2 & -2 & 1\end{pmatrix}$ la matrice de passage (donc inversible) de la b.c à la base (U,V,W) et $D=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ la matrice diagonale contenant les vp de A (dans le même ordre que les VP).

On a d'après la formule de changement de base : $A=PDP^{-1}$.

5. **Montrer que, pour tout entier $k\geqslant 0$, on a : $A^k=PD^kP^{-1}$.**

Par récurrence.

- Pour $k=0$, on a : $A^0=I$ et $PD^0P^{-1}=I$ d'où le résultat.
- Soit $k\in\mathbb{N}$, on suppose que $A^k=PD^kP^{-1}$.
  On a alors, en utilisant l'HR et la relation $A=PDP^{-1}$:

$$A^{k+1}=A^kA=PD^k\underbrace{P^{-1}P}_{=I}DP^{-1}=PD^{k+1}P^{-1}$$

Ainsi, pour tout entier $k\geqslant 0$, on a : $A^k=PD^kP^{-1}$.

Partie 2 : Exponentielle d'une matrice carrée

- **On dit que la suite de matrices $M_n=\begin{pmatrix}a_n & b_n & c_n\\d_n & e_n & f_n\\g_n & h_n & i_n\end{pmatrix}$ de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ admet une limite coefficient par coefficient si les neufs suites $(a_n),(b_n),(c_n),(d_n),(e_n),(f_n),(g_n),(h_n),(i_n)$ sont convergentes, de limites respectives a,b,c,d,e,f,g,h,i. Dans ce cas, on note :**

$$\lim_{n\to+\infty}M_n=\begin{pmatrix}a & b & c\\d & e & f\\g & h & i\end{pmatrix}$$

- **Pour toute matrice M de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, on pose, pour tout entier naturel n :**

$$S_n(M)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}M^k$$

Lorsque $(S_n(M))_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite coefficient par coefficient, on note $e^M=\lim\limits_{n\to+\infty}S_n(M)$ cette limite, que l'on nomme alors exponentielle de la matrice M.

6. **Dans cette question, on pose $\Delta=\begin{pmatrix}a & 0 & 0\\0 & b & 0\\0 & 0 & c\end{pmatrix}$ une matrice diagonale de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.**

   (a) **Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Expliciter la matrice $S_n(\Delta)$.**

   Par définition, on a : $S_n(\Delta)=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\Delta^k$.

Or, comme Δ est diagonale, on a : $\Delta^k=\begin{pmatrix}a^k & 0 & 0\\0 & b^k & 0\\0 & 0 & c^k\end{pmatrix}$, ce qui donne :

$$S_n(\Delta)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\begin{pmatrix}a^k & 0 & 0\\0 & b^k & 0\\0 & 0 & c^k\end{pmatrix}=\sum_{k=0}^{n}\begin{pmatrix}\frac{a^k}{k!} & 0 & 0\\0 & \frac{b^k}{k!} & 0\\0 & 0 & \frac{c^k}{k!}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{a^k}{k!} & 0 & 0\\0 & \sum\limits_{k=0}^{n}\frac{b^k}{k!} & 0\\0 & 0 & \sum\limits_{k=0}^{n}\frac{c^k}{k!}\end{pmatrix}$$

   (b) **En déduire que e^Δ existe et vaut : $e^\Delta=\begin{pmatrix}e^a & 0 & 0\\0 & e^b & 0\\0 & 0 & e^c\end{pmatrix}$.**

   Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{a^k}{k!}=\mathrm{e}^a$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{b^k}{k!}=\mathrm{e}^b$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{c^k}{k!}=\mathrm{e}^c$, on en déduit que $S_n(\Delta)$ admet une limite coefficient par coefficient et donc que e^Δ existe et vaut : $e^\Delta=\lim\limits_{n\to+\infty}S_n(\Delta)=\begin{pmatrix}e^a & 0 & 0\\0 & e^b & 0\\0 & 0 & e^c\end{pmatrix}$.

7. **Dans cette question, on considère les matrices A, P et D de la Partie 1 et on fixe un réel t.**
   On admet le résultat suivant :
   Si $(M_n))_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite coefficient par coefficient, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(PM_nP^{-1}\right)=P\left(\lim\limits_{n\to+\infty}M_n\right)P^{-1}$.

   (a) **Déduire de la question 5 que, pour tout $n\in\mathbb{N}$: $S_n(tA)=PS_n(tD)P^{-1}$.**

   Soit $n\in\mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}S_n(tA)&=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}(tA)^k\\&=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}t^kA^k\\&=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}t^kPD^kP^{-1}\quad\text{d'après la question 5}\\&=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}P(tD)^kP^{-1}\\&=P\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}(tD)^k\right)P^{-1}\\&=PS_n(tD)P^{-1}\end{aligned}$$

   Ainsi, , pour tout $n\in\mathbb{N}$: $S_n(tA)=PS_n(tD)P^{-1}$.

   (b) **Conclure que e^{tA} existe et que : $e^{tA}=Pe^{tD}P^{-1}$.**

   On passe à la limite dans la relation précédente en utilisant le résultat admis. On a alors :

$$\lim_{n\to+\infty}S_n(tA)=\lim_{n\to+\infty}\left(PS_n(tD)P^{-1}\right)=P\lim_{n\to+\infty}(S_n(tD))P^{-1}$$

   Or, la matrice tD est diagonale donc $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n(tD)$ existe et vaut e^{tD} (d'après la question 6b).

   On en déduit donc que $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n(tA)$ existe et vaut $Pe^{tD}P^{-1}$.

   Ainsi, e^{tA} existe et on a : $e^{tA}=Pe^{tD}P^{-1}$.

   (c) **La matrice e^{tA} est-elle diagonalisable?**

   On a : $e^{tA}=Pe^{tD}P^{-1}$ avec P inversible et e^{tD} diagonale (d'après la question 6b) ce qui montre que la matrice e^{tA} est diagonalisable.

Partie 3 : Application à un système différentiel linéaire

On considère le système différentiel ($\mathscr{E}$) suivant :

$$(\mathscr{E}) : \forall t \in \mathbb{R},\ X'(t) = AX(t)$$

où A **est la matrice introduite dans la Partie 1 et où on a noté** $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$, $X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}$, **les inconnues** x, y, z **étant des fonctions de classe** $\mathscr{C}^1$ **sur** $\mathbb{R}$.

8. **Expliciter le système différentiel ($\mathscr{E}$).**
On a, avec la matrice A de la Partie 1 :

$$(\mathscr{E}) : \forall t \in \mathbb{R},\ X'(t) = AX(t) \iff (\mathscr{E}) \begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 2y(t) + 2z(t) \\ y'(t) = x(t) + y(t) + 2z(t) \\ z'(t) = -2x(t) - 3z(t) \end{cases}$$

9. **Montrer que le système différentiel ($\mathscr{E}$) admet une infinité de points d'équilibres et les déterminer.**
Les points d'équilibres de ($\mathscr{E}$) sont des solutions X de ($\mathscr{E}$) constituées de fonctions constantes donc vérifiant $X' = 0$ soit $AX = 0$ soit $X \in \mathrm{Ker}(A)$.
Or, on a vu que : $\mathrm{Ker}(A) = E_0(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$ donc les points d'équilibre sont : $\{(3\lambda, \lambda, -2\lambda), \lambda \in \mathbb{R}\}$.

10. (a) **Montrer que les solutions du système différentiel ($\mathscr{E}$) peuvent s'écrire sous la forme**

$$X(t) = \alpha e^{-t}U + \beta V + \gamma e^t W \quad \text{avec } (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \quad \text{et } U = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On a :

- A est diagonalisable.
- $U = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ (resp. $V = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, resp. $W = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$) est un vecteur propre associé à la valeur propre -1 (resp. 0, resp. 1).

donc d'après le cours, les solutions du système différentiel ($\mathscr{E}$) sont :

$$X(t) = \alpha e^{-t}U + \beta V + \gamma e^t W \quad \text{avec } (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$$

(b) **On pose** $C = P\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ **où** P **est la matrice obtenue à la question 4.**

Montrer, à l'aide de la question 7b que : $X(t) = e^{tA} \cdot C$.

D'après la question 7b, on a : $e^{tA} = Pe^{tD}P^{-1}$, ce qui donne avec $C = P\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$:

$$e^{tA} \cdot C = Pe^{tD} \underbrace{P^{-1}P}_{=I} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = Pe^{tD} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

Or, comme $tD = \begin{pmatrix} -t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix}$ est diagonale, on a : $e^{tD} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^0 & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}$ d'après la question 6b.

On a donc :

$$e^{tA} \cdot C = P\begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^0 & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} \alpha e^{-t} \\ \beta \\ \gamma e^t \end{pmatrix} = \alpha e^{-t}U + \beta V + \gamma e^t W = X(t)$$

car les colonnes de P sont les vecteurs U, V et W.

11. **On considère le problème de Cauchy ($\mathscr{P}_1$) suivant :** $(\mathscr{P}_1) \begin{cases} X'(t) = AX(t) \quad \textbf{et } X(0) = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} \end{cases}$.

(a) **Déterminer l'expression de la solution (notée $X_1(t)$) obtenue pour $\alpha = 3$, $\beta = 1$, $\gamma = 0$ puis vérifier que X_1 est l'unique solution du problème de Cauchy ($\mathscr{P}_1$).**
Pour $\alpha = 3$, $\beta = 1$, $\gamma = 0$, on obtient :

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} 6e^{-t} + 3 \\ 3e^{-t} + 1 \\ -6e^{-t} - 2 \end{pmatrix}$$

Comme un problème de Cauchy admet une unique solution, il suffit de vérifier que X_1 satisfait la condition initiale. Or, on a : $X_1(0) = \begin{pmatrix} 6e^0 + 3 \\ 3e^0 + 1 \\ -6e^0 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix}$.
Ainsi, X_1 est l'unique solution du problème de Cauchy ($\mathscr{P}_1$).

(b) **Montrer que la trajectoire associée à la solution X_1 converge vers un point d'équilibre que l'on explicitera.**
On a : $\lim\limits_{t \to +\infty} X_1(t) = \begin{pmatrix} \lim\limits_{t \to +\infty} 6e^{-t} + 3 \\ \lim\limits_{t \to +\infty} 3e^{-t} + 1 \\ \lim\limits_{t \to +\infty} -6e^{-t} - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ donc X_1 converge le point d'équilibre $(3, 1, -2)$.

12. **On a représenté en annexe 1 (en fin de sujet) les tracés de quatre solutions du système ($\mathscr{E}$).**

(a) **Quel graphique représente les trajectoires de la solution X_1 ? Justifier la réponse.**
On a vu que la solution X_1 converge le point d'équilibre $(3, 1, -2)$.
Cela correspond donc au graphique 1.

(b) **Montrer que la trajectoire de la solution, notée X_2, obtenue pour $\alpha = 8$, $\beta = 10$, $\gamma = 3$ est divergente. Quel graphique représente les trajectoires de la solution X_2 ? Justifier la réponse.**
Comme $\gamma \neq 0$, la trajectoire de la solution X_2 diverge.
En effet, en considérant la première composante de $X_2(t) = \begin{pmatrix} 16e^{-t} + 30 - 6e^t \\ 8e^{-t} + 10 \\ -16e^{-t} - 20 + 3e^t \end{pmatrix}$, on a :
$\lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} 16e^{-t} + 30 - 6e^t = +\infty$.
Comme la trajectoire diverge, le graphique représentant la solution X_2 est soit le graphique 2, soit le graphique 4.
Or, on a : $\lim\limits_{t \to +\infty} y(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} 8e^{-t} + 10 = 10$ ce qui nous permet de conclure qu'il s'agit du graphique 2.

Exercice 2

Partie 1 : La loi binomiale négative

Toutes les variables aléatoires intervenant dans cet exercice sont supposées définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
Soit p un réel vérifiant $0 < p < 1$. On pose $q = 1 - p$. On dispose d'une urne contenant des boules rouges en proportion p et des boules vertes en proportion q. On effectue dans cette urne une suite de tirages d'une boule avec remise jusqu'à ce que l'on obtienne une boule rouge. On suppose que les résultats des différents tirages sont indépendants.
Pour tout i de $\mathbb{N}^*$, on note R_i (resp. V_i) l'événement : " le i-ième tirage amène une boule rouge (resp. verte) ". Ainsi, on a : $\forall i \in \mathbb{N}^*,\ P(R_i) = p$ et $P(V_i) = q$.
On note Z la variable aléatoire égale au nombre de boules vertes obtenues avant l'apparition de la première boule rouge et on pose $Z = -1$ si l'on n'obtient jamais une boule rouge.

1. (a) **Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $P([Z = n]) = pq^n$.**
   L'évènement $[Z = n]$ signifie qu'on a obtenu n boules vertes avant l'apparition de la première boule rouge.
   - Si $n = 0$, on a : $[Z = 0] = R_1$ donc $P([Z = 0]) = p = pq^0$.
   - Si $n > 0$, on a : $[Z = n] = V_1 \cap \cdots \cap V_n \cap R_{n+1}$
     ce qui donne par indépendance des tirages :
     $P([Z = n]) = P(V_1 \cap \cdots \cap V_n \cap R_{n+1}) = P(V_1) \times \cdots \times P(V_n) \times P(R_{n+1}) = pq^n$.

   Ainsi, on a bien : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ P([Z = n]) = pq^n.}$

   (b) **Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} P([Z = n])$ et en déduire la valeur de $P([Z = -1])$.**
   On a, en reconnaissant une série géométrique convergente (car $0 < q < 1$) :
   $$\sum_{n=0}^{+\infty} P([Z = n]) = \sum_{n=0}^{+\infty} pq^n = p\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = p\frac{1}{1-q} \quad \text{soit} \quad \boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} P([Z = n]) = 1}$$
   Comme $Z(\Omega) = \{-1\} \cup \mathbb{N}$, on a :
   $\sum_{n=-1}^{+\infty} P([Z = n]) = 1$ donc $P([Z = -1]) = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} P([Z = n]) = 1 - 1 = 0$. Ainsi, $\boxed{P([Z = -1]) = 0}$.

2. (a) **Montrer que la variable aléatoire $Z + 1$ suit une loi géométrique de paramètre p.**
   Comme $P([Z = -1]) = 0$, on a $Z(\Omega) = \mathbb{N}$ donc $(Z + 1)(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $P(Z + 1 = n) = P(Z = n - 1) = pq^{n-1}$ d'après la question **??**.
   On reconnait la formule d'une loi géométrique donc $\boxed{Z + 1 \text{ suit une loi géométrique de paramètre } p.}$

   (b) **En déduire que Z admet une espérance et que $E(Z) = \dfrac{q}{p}$.**
   On en déduit d'après le cours que : $E(Z + 1) = \dfrac{1}{p}$.
   Ainsi, linéarité de l'espérance, Z admet une espérance et on a :
   $E(Z + 1) = E(Z) + 1 = \dfrac{1}{p}$ donc $E(Z) = \dfrac{1}{p} - 1 = \dfrac{1-p}{p}$ soit $\boxed{E(Z) = \dfrac{q}{p}.}$

   (c) **En déduire que Z admet une variance et préciser sa valeur.**
   De même : $V(Z + 1) = \dfrac{q}{p^2}$ puis par propriété de la variance, Z admet une variance et on a :
   $V(Z + 1) = V(Z)$ soit $\boxed{V(Z) = \dfrac{q}{p^2}.}$

On dira qu'une variable aléatoire X suit la loi binomiale négative de paramètre p si elle suit la même loi que Z.
Ainsi, on retiendra le résultat noté $(\star)$ suivant, utile pour la suite :

Si X suit la loi binomiale négative de paramètre p alors : $X(\Omega) = \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $P([X = n]) = pq^n$ ***et*** $E(X) = \dfrac{q}{p}$.

3. **Simulation informatique.**
   (a) Compléter la fonction `BinomNeg(p)` suivante qui prend en paramètre un réel $p \in]0, 1[$ et qui simule la variable Z et donc une variable aléatoire suivant une loi binomiale négative de paramètre p.

```python
import numpy as np ; import numpy.random as rd
def BinomNeg(p) :
    S = 0
    while rd.rand() > p : # (ou < 1-p) proba d'avoir V
        S += 1
    return S
```

   (b) **Compléter la fonction `BinomNeg2(p)` suivante qui prend en paramètre un réel $p \in]0, 1[$ et qui simule également une variable aléatoire suivant une loi binomiale négative de paramètre p, cette fois en utilisant le résultat de la question 2a.**
   On rappelle que la commande "`rd.geometric(p)`" renvoie une réalisation d'une loi géométrique de paramètre p.

```python
def BinomNeg2(p) :
    G = rd.geometric(p)
    return G - 1  # car Z+1 suit une loi géométrique
```

   Comme la variable aléatoire $Z + 1$ suit une loi géométrique de paramètre p, la variable G représente $Z + 1$ donc on obtient Z en renvoyant $G - 1$.

Partie 2 : Un calcul statistique

Soit X_1, X_2 et X_3 trois variables aléatoires indépendantes de même loi binomiale négative de paramètre p.
On pose : $T = X_1 + X_2$ et $W = X_2 + X_3$.

4. **Soit $n \in \mathbb{N}$. On rappelle que :**
   - $\operatorname{cov}(x, y) = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i - \overline{x} \cdot \overline{y}$ **désigne la covariance empirique de la série statistique double $(x_i, y_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$, avec $\overline{x}$ (resp. $\overline{y}$) qui désignent la moyenne empirique associée à $(x_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ (resp. $(y_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$).**
   - $\rho_{x,y} = \dfrac{\operatorname{cov}(x, y)}{\sigma_x \sigma_y}$ **désigne le coefficient de corrélation linéaire empirique de la série statistique double $(x_i, y_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$, avec σ_x et σ_y qui désignent les écarts-types empiriques des séries $(x_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ et $(y_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$.**

   (a) ***On rappelle que la commande "`np.mean(x)`" renvoie la moyenne empirique des éléments de x.***
   Compléter les fonctions suivantes pour que la seconde calcule le coefficient de corrélation linéaire empirique des séries `X` et `Y` données en paramètre.

```python
def Covariance(X,Y) :
  return np.mean(X*Y) - np.mean(X)*np.mean(Y)
```

```python
def CoeffCorr(X,Y) :
  CovXY = Covariance(X,Y)
  VarX = Covariance(X,X)   # car V(X)=cov(X,X)
  VarY = Covariance(Y,Y)   # car V(Y)=cov(Y,Y)
  return CovXY / ((VarX*VarY)**(1/2))
```

   (b) **Soit $n \in \mathbb{N}$. On souhaite construire deux séries statistiques $(t_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ et $(w_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ associées aux variables T et W (définies plus haut) et calculer leur coefficient de corrélation linéaire empirique.**
      i. **Compléter la fonction suivante pour qu'elle simule deux séries statistiques $(t_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ et $(w_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ associées aux variables T et W.**

```python
def Simu_TW(p,n) :
    X_1 = np.zeros(n)
    X_2 = np.zeros(n)
    X_3 = np.zeros(n)
    for i in range(n) :
        X_1[i] = BinomNeg(p) # Simulation de X1
        X_2[i] = BinomNeg(p) # Simulation de X2
        X_3[i] = BinomNeg(p) # Simulation de X3
    return ( X_1+X_2 , X_2+X_3 ) # renvoie (t_i) et (w_i)
```

A chacun des n passages dans la boucle on simule une valeur de la loi binomiale négative pour X_1, X_2 et X_3.

ii. **On considère le script Python suivant**

```python
val_p = np.arange(0.1,1,0.2)
# val_p contient une liste de valeurs pour p entre 0.1 et 0.9
for p in val_p :
    T,W = Simu_TW(p,10000)
    print(CoeffCorr(T,W))
```

qui renvoie le résultat suivant

```
0.5082364877696511
0.4924050605018343
0.49424137980025185
0.5048354509961391
0.5350220088999194
```

Que peut-on conjecturer sur la valeur du coefficient de corrélation empirique $\rho_{t,w}$ de $(t_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ et $(w_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ en fonction des valeurs de p?

Ce programme calcule et affiche le coefficient de corrélation empirique $\rho_{t,w}$ (pour $n = 10000$) et pour différentes valeurs de p.

Tous les résultats sont proches de 1/2 donc on peut conjecture que $\rho_{t,w} = 1/2$ et que ce coefficient ne dépend pas de p.

5. **On rappelle que X_1, X_2 et X_3 trois variables aléatoires indépendantes de même loi binomiale négative de paramètre p et que : $T = X_1 + X_2$ et $W = X_2 + X_3$.**

(a) **Montrer que $Cov(T,W) = V(X_2)$. Les variables aléatoires T et W sont-elles indépendantes?**

On a par double linéarité de la covariance :

$$\begin{aligned} Cov(T,W) &= Cov(X_1+X_2, X_2+X_3) \\ &= \underbrace{Cov(X_1,X_2)}_{=0 \text{ par indép.}} + \underbrace{Cov(X_1,X_3)}_{=0 \text{ par indép.}} + \underbrace{Cov(X_2,X_2)}_{=V(X_2)} + \underbrace{Cov(X_2,X_3)}_{=0 \text{ par indép.}} \\ &= V(X_2) \end{aligned}$$

Comme $Cov(T,W) = V(X_2) \neq 0$, on en déduit que les $\boxed{T \text{ et } W \text{ ne sont pas indépendantes.}}$

(b) **Montrer que $V(T) = V(W) = 2V(X_2)$ puis calculer le coefficient de corrélation linéaire $\rho(T,W)$ des variables aléatoires T et W.**

Votre conjecture de la question 4(b)ii est-elle vérifiée?

On a :

$$\begin{aligned} V(T) &= V(X_1+X_2) \\ &= V(X_1) + V(X_2) \quad \text{par indépendance} \\ &= 2V(X_2) \quad \text{même loi} \end{aligned}$$

De même, on a : $V(W) = 2V(X_2)$.

D'autre part, on a :

$$\rho(T,W) = \frac{Cov(T,W)}{\sqrt{V(T)}\sqrt{V(W)}} = \frac{V(X_2)}{\sqrt{V(T)}\sqrt{V(W)}} == \frac{V(X_2)}{\sqrt{2V(X_2)}\sqrt{2V(X_2)}} = \frac{V(X_2)}{\sqrt{4}V(X_2)} \quad \text{soit} \quad \boxed{\rho(T,W) = \frac{1}{2}}$$

Notre conjecture de la question 4(b)ii est bien vérifiée.

Partie 3 : Une matrice aléatoire

Soient S_1 et S_2 deux variables aléatoires indépendantes, et suivant toutes les deux la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On pose $T_1 = \lfloor S_1 \rfloor$ la partie entière de S_1 et $T_2 = \lfloor S_1 \rfloor$ la partie entière de S_2. On a donc :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ (T_1 = k) = (k \leqslant S_1 < k+1) \quad \text{et} \quad (T_2 = k) = (k \leqslant S_2 < k+1)$$

6. (a) **Donner la fonction de répartition de S_1.**

On a : $F_{S_1}(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$.

(b) **Pour tout entier k, calculer $P(T_1 = k)$ puis en déduire que T_1 suit une loi binomiale négative de paramètre $p_\lambda = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda}$.**

On remarquera que T_2 suit la même loi que T_1.

On a $T_1(\Omega) = \mathbb{N}$. Soit $k \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} P(T_1 = k) &= P(k \leqslant S_1 < k+1) \\ &= F_{S_1}(k+1) - F_{S_1}(k) \\ &= 1 - \mathrm{e}^{-\lambda(k+1)} - 1 + \mathrm{e}^{-\lambda k} \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda k}\left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda}\right) \\ &= \left(\mathrm{e}^{-\lambda}\right)^k \left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda}\right) \\ &= q_\lambda^k p_\lambda \end{aligned}$$

avec $p_\lambda = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda}$ et $q_\lambda = 1 - p_\lambda = \mathrm{e}^{-\lambda}$.

Ainsi, $\boxed{T_1 \text{ suit une loi binomiale négative de paramètre } p_\lambda = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda}}$.

7. (a) **Justifier que T_1 et T_2 sont indépendantes.**

Comme S_1 et S_2 sont indépendantes, on en déduit que T_1 et T_2 sont indépendantes par le lemme des coalitions.

(b) **On note $q_\lambda = 1 - p_\lambda$. Montrer que : $P(T_1 = T_2) = \sum_{k=0}^{+\infty} p_\lambda^2 q_\lambda^{2k}$.**

On a $T_1(\Omega) = \mathbb{N}$. D'après la FPT avec le SCE $(T_1 = k)_{k\in\mathbb{N}}$, on a :

$$\begin{aligned} P(T_1 = T_2) &= \sum_{k=0}^{+\infty} P((T_1 = T_2) \cap (T_1 = k)) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} P((T_2 = k) \cap (T_1 = k)) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} P(T_2 = k) P(T_1 = k) \quad \text{par indépendance} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} q_\lambda^k p_\lambda q_\lambda^k p_\lambda \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} p_\lambda^2 q_\lambda^{2k} \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{P(T_1 = T_2) = \sum_{k=0}^{+\infty} p_\lambda^2 q_\lambda^{2k}.}$

(c) **Calculer alors $P(T_1 = T_2)$ en fonction de p_λ et q_λ puis vérifier que $P(T_1 = T_2) = \dfrac{1-\mathrm{e}^{-\lambda}}{1+\mathrm{e}^{-\lambda}}$.**

On a alors :

$$\begin{aligned} P(T_1 = T_2) &= \sum_{k=0}^{+\infty} p_\lambda^2 q_\lambda^{2k} \\ &= p_\lambda^2 \sum_{k=0}^{+\infty} \left(q_\lambda^2\right)^k \\ &= p_\lambda^2 \frac{1}{1-q_\lambda^2} \quad \text{car } 0 < q_\lambda^2 = \mathrm{e}^{-2\lambda} < 1 \\ &= p_\lambda^2 \frac{1}{(1-q_\lambda)(1+q_\lambda)} \\ &= \frac{p_\lambda^2}{p_\lambda(1+q_\lambda)} = \frac{p_\lambda}{1+q_\lambda} = \frac{1-\mathrm{e}^{-\lambda}}{1+\mathrm{e}^{-\lambda}} \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{P(T_1 = T_2) = \dfrac{1-\mathrm{e}^{-\lambda}}{1+\mathrm{e}^{-\lambda}}}$.

8. **On considère la matrice aléatoire $M = \begin{pmatrix} 1 & T_1 \\ 1 & T_2 \end{pmatrix}$.**

(a) **Montrer que M est inversible si, et seulement si, on a : $T_1 \neq T_2$.**

$\boxed{M \text{ est inversible} \quad \text{ssi} \quad T_1 - T_2 \neq 0 \ (ad - bc \neq 0) \quad \text{ssi} \quad T_1 \neq T_2.}$

(b) **En déduire que la probabilité p_1 que M soit inversible est : $p_1 = \dfrac{2e^{-\lambda}}{1+e^{-\lambda}}$.**

On a, d'après les deux questions précédentes :

$$p_1 = P(T_1 \neq T_2) = 1 - P(T_1 = T_2) = 1 - \frac{1-\mathrm{e}^{-\lambda}}{1+\mathrm{e}^{-\lambda}} = \frac{1+e^{-\lambda}-1+e^{-\lambda}}{1+e^{-\lambda}} = \frac{2e^{-\lambda}}{1+e^{-\lambda}}$$

Ainsi, $\boxed{p_1 = \dfrac{2e^{-\lambda}}{1+e^{-\lambda}}}$.

Partie 4 : Loi du maximum

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi binomiale négative de paramètre p (définies par la relation ($\star$)).
On pose : $U = \max(X, Y)$ et $V = \min(X, Y)$.

9. **Montrer que la loi du couple (U, V) est donnée par :**

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ P([U=i] \cap [V=j]) = \begin{cases} 2p^2 q^{i+j} & \text{si } i > j \\ 0 & \text{si } i < j \\ p^2 q^{2i} & \text{si } i = j \end{cases}$$

On a : $([U=i] \cap [V=j]) = ([\max(X,Y)=i] \cap [\min(X,Y)=j])$.

- Si $i < j$, l'évènement $([U=i] \cap [V=j])$ est impossible car le maximum de X et Y ne peut pas être strictement inférieur au minimum de X et Y.
Donc $\boxed{P([U=i] \cap [V=j]) = 0 \text{ si } i < j}$.
- Si $i = j$, le maximum et le minimum sont égaux à i, c'est à dire que X et Y sont tous les deux égaux à i donc on a : $([U=i] \cap [V=i]) = ([X=i] \cap [Y=i])$. On a alors :

$$\begin{aligned} P([U=i] \cap [V=i]) &= P([X=i] \cap [Y=i]) \\ &= P([X=i]) \times P([Y=i]) \quad \text{par indépendance} \\ &= pq^i \times pq^i \quad \text{loi binomiale négative} \\ &= p^2 q^{2i} \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{P([U=i] \cap [V=i]) = p^2 q^{2i} \text{ si } i = j}$.

- Si $i > j$, l'une des deux variables est égale à i (le maximum) et l'autre à j (le minimum) donc on a : $([U=i] \cap [V=i]) = \big(([X=i] \cap [Y=j]) \cup ([X=j] \cap [Y=i])\big)$. On a alors :

$$\begin{aligned} P([U=i] \cap [V=j]) &= P\big(([X=i] \cap [Y=j]) \cup ([X=j] \cap [Y=i])\big) \\ &= P\big([X=i] \cap [Y=j]\big) + P\big([X=j] \cap [Y=i]\big) \quad \text{par incompatibilité} \\ &= P([X=i]) \times P([Y=j]) + P([X=j]) \times P([Y=i]) \quad \text{par indépendance} \\ &= pq^i \times pq^j + pq^j \times pq^i \quad \text{loi binomiale négative} \\ &= 2p^2 q^{i+j} \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{P([U=i] \cap [V=j]) = 2p^2 q^{i+j} \text{ si } i > j}$.

10. (a) **Montrer que : $\forall j \in \mathbb{N},\ P([V=j]) = \displaystyle\sum_{i=j}^{+\infty} P([U=i] \cap [V=j])$.**

D'après la FPT avec le SCE $([U=i])_{i \in \mathbb{N}}$, on a :

$$\begin{aligned} P([V=j]) &= \sum_{i=0}^{+\infty} P([U=i] \cap [V=j]) \\ &= \underbrace{\sum_{i=0}^{j-1} P([U=i] \cap [V=j])}_{=0 \text{ car } i<j} + \sum_{i=j}^{+\infty} P([U=i] \cap [V=j]) \\ &= \sum_{i=j}^{+\infty} P([U=i] \cap [V=j]) \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\forall j \in \mathbb{N},\ P([V=j]) = \displaystyle\sum_{i=j}^{+\infty} P([U=i] \cap [V=j]).}$

(b) **En déduire que : $\forall j \in \mathbb{N},\ P([V=j]) = p\left(1+q\right) q^{2j}$.**

On a alors :

$$\begin{aligned} P([V=j]) &= \sum_{i=j}^{+\infty} P([U=i] \cap [V=j]) \\ &= P([U=j] \cap [V=j]) + \sum_{i=j+1}^{+\infty} P([U=i] \cap [V=j]) \\ &= p^2 q^{2j} + \sum_{i=j+1}^{+\infty} 2p^2 q^{i+j} \\ &= p^2 q^{2j} + 2p^2 q^j \sum_{i=j+1}^{+\infty} q^i \\ &= p^2 q^{2j} + 2p^2 q^j \sum_{k=0}^{+\infty} q^{k+j+1} \quad \text{changement d'indice } k = i-(j+1) \\ &= p^2 q^{2j} + 2p^2 q^j q^{j+1} \sum_{k=0}^{+\infty} q^k \\ &= p^2 q^{2j} + 2p^2 q^{2j+1} \frac{1}{1-q} \\ &= p^2 q^{2j} + 2pq^{2j+1} \\ &= pq^{2j}\left(p+2q\right) \\ &= pq^{2j}\left(1-q+2q\right) \\ &= p\left(1+q\right) q^{2j} \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\forall j \in \mathbb{N},\ P([V=j]) = p\left(1+q\right) q^{2j}.}$

(c) **En déduire que V suit une loi binomiale négative de paramètre $\left(1-q^2\right)$.**
Il s'agit de montrer que $P([V=j]) = \tilde{p}(1-\tilde{p})^j$ avec $\tilde{p} = (1-q^2)$ soit $P([V=j]) = (1-q^2)(q^2)^j$.
Or, on a

$$P([V=j]) = p\left(1+q\right)q^{2j} = \left(1-q\right)\left(1+q\right)(q^2)^j = \left(1-q^2\right)(q^2)^j$$

Ainsi, $\boxed{V \text{ suit une loi binomiale négative de paramètre } \left(1-q^2\right).}$

(d) **En déduire que V admet une espérance et que $E(V) = \dfrac{q^2}{1-q^2}$.**
On utilise la formule de la relation $(\star)$ en remplaçant p par $\left(1-q^2\right)$ et donc q par $1-\left(1-q^2\right) = q^2$, ce qui donne : $\boxed{E(V) = \dfrac{q^2}{1-q^2}.}$

11. (a) **Justifier que $U+V = X+Y$.**
Si $U = \max(X,Y) = X$, alors $V = \min(X,Y) = Y$ et donc $U+V = X+Y$.
Si $U = \max(X,Y) = Y$, alors $V = \min(X,Y) = X$ et donc $U+V = X+Y$.
Ce sont les deux seules possibilités donc dans tous les cas, on a $\boxed{U+V = X+Y.}$

(b) **En déduire que U admet une espérance et que $E(U) = \dfrac{2q+q^2}{1-q^2}$.**
On a $U+V = X+Y$ donc $U = X+Y-V$, ce qui donne :

$$\begin{aligned}
E(U) = E(X+Y-V) &= E(X)+E(Y)-E(V) \quad \text{par linéarité de l'espérance}\\
&= \frac{q}{p}+\frac{q}{p}-\frac{q^2}{1-q^2}\\
&= \frac{2q}{(1-q)}-\frac{q^2}{1-q^2} = \frac{2q(1+q)}{(1-q)(1+q)}-\frac{q^2}{1-q^2} = \frac{2q+2q^2-q^2}{1-q^2} = \frac{2q+q^2}{1-q^2}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{E(U) = \dfrac{2q+q^2}{1-q^2}.}$

Exercice 3

1. (a) **Rappeler l'expression de la densité φ d'une loi normale centrée réduite puis montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.**
On a : $\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$.
Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut 1.
Par parité de la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\dfrac{1}{2}$.
Donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

<u>On admet</u> alors que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\sqrt{\pi}$.

(b) **En déduire que pour tout réel x, l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est convergente.**
D'après la question précédente, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est convergente.
D'autre part, pour tout réel x, l'intégrale $\displaystyle\int_x^{0} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est convergente car $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est continue sur $[x,\ 0]$.
Donc, d'après la relation de Chasles, l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

(c) **Montrer que la fonction $h : x \mapsto \displaystyle\int_0^{x} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et donner $h'(x)$ pour tout réel x.**
La fonction $k : t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc d'après le théorème fondamental de l'analyse, la fonction $h : x \mapsto \displaystyle\int_0^{x} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est la primitive (qui s'annule en x) de k.
Ainsi, h est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et on a : $\forall x \in \mathbb{R},\ \ h'(x) = k(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$.

(d) **Déduire des questions précédentes que la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que $g'(x) = -\mathrm{e}^{-x^2}$ pour tout réel x.**
On a, en utilisation la relation de Chasles pour faire apparaitre la fonction h :

$$g(x) = \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_x^{0} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = -\int_0^{x} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t + \sqrt{\frac{\pi}{2}} = -h(x) + \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Ainsi, g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (car h l'est) et on a : $\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = -h'(x) = -\mathrm{e}^{-x^2}$.

Dans toute la suite de l'exercice, on note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \mathrm{e}^{x^2}\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

2. **Montrer que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et montrer que f' vérifie la relation :**

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = -1 + 2xf(x)$$

On remarque que pour tout réel x, on a : $f(x) = \mathrm{e}^{x^2}g(x)$ donc f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ et on a : $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 2x\mathrm{e}^{x^2}g(x) + \mathrm{e}^{x^2}g'(x)\\
&= 2x\mathrm{e}^{x^2}\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t + \mathrm{e}^{x^2}\left(-\mathrm{e}^{-x^2}\right) \quad \text{d'après la question 1d}\\
&= 2xf(x) - \mathrm{e}^{x^2-x^2}\\
&= 2xf(x) - 1
\end{aligned}$$

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = -1 + 2xf(x)$.

3. **Montrer que la fonction f est positive sur $\mathbb{R}$ et préciser $f(0)$.**
Soit $x \in \mathbb{R}$.
On a : $e^{x^2} > 0$ et $g(x) = \int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,dt \geqslant 0$ par positivité de l'intégrale (car $e^{-t^2} \geqslant 0$ et l'intégrale est convergente d'après Q 1b).
Ainsi, f est positive sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions positives.
D'autre part, on a : $f(0) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}$ d'après la question **??**

4. (a) **Déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}_-$.**
On a vu que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = -1 + 2xf(x)$.
Or, f est positive sur $\mathbb{R}$ donc pour tout $x \leqslant 0$, on a : $2xf(x) \leqslant 0$ donc $f'(x) = -1 + 2xf(x) \leqslant 0$.
Ainsi, f est décroissante sur $\mathbb{R}_-$.

(b) **Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$.**
On a : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = e^{x^2}\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x^2} = +\infty$ par composition.
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = 2\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = 2\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2\pi} > 0$ la convergence et la valeur découlant de la question **??**.

Par produit, on a donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

5. (a) **Montrer que pour tout réel $x \geqslant 0$, l'intégrale $\int_x^{+\infty} 2te^{-t^2}\,dt$ est convergente et déterminer sa valeur (en fonction de x).**
$t \mapsto 2te^{-t^2}$ est continue sur $[x, +\infty[$ donc $\int_x^{+\infty} 2te^{-t^2}\,dt$ est impropre en $+\infty$.
Soit $A \geqslant x$. On a :
$$\int_x^A 2te^{-t^2}\,dt = \left[-e^{-t^2}\right]_x^A = -e^{-A^2} + e^{-x^2} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-x^2} \quad \text{par composition}$$
Ainsi, l'intégrale $\int_x^{+\infty} 2te^{-t^2}\,dt$ est convergente et $\int_x^{+\infty} 2te^{-t^2}\,dt = e^{-x^2}$.

(b) **En déduire pour tout réel $x \geqslant 0$, l'inégalité : $2xf(x) \leqslant 1$.**
Il faut faire le lien entre $\int_x^{+\infty} 2te^{-t^2}\,dt$ et $2xf(x) = 2x\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$. Il s'agit de comparer deux intégrales donc on commence par étudier les intégrandes.
Soit $x \geqslant 0$. On a pour tout $t \geqslant x$.
$$\begin{aligned} t \geqslant x &\iff 2t \geqslant 2x \\ &\iff 2te^{-t^2} \geqslant 2xe^{-t^2} \quad \text{car } e^{-t^2} > 0 \\ &\iff \int_x^{+\infty} 2te^{-t^2}\,dt \geqslant \int_x^{+\infty} 2xe^{-t^2}\,dt \quad \text{par croissance de l'intégrale (intégrales convergentes)} \\ &\iff e^{-x^2} \geqslant 2x\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,dt \quad \text{d'après le calcul de la question précédente} \\ &\iff 1 \geqslant 2xf(x) \quad \text{car } x \geqslant 0 \implies e^{-x^2} \leqslant 1 \end{aligned}$$
Ainsi, pour tout réel $x \geqslant 0$, on a : $2xf(x) \leqslant 1$.

(c) **En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}_+$.**
On a vu que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = -1 + 2xf(x)$.
D'après la question précédente, on a : $\forall x \geqslant 0, \quad 2xf(x) \leqslant 1$ donc $f'(x) = -1 + 2xf(x) \leqslant 0$.
Ainsi, f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

(d) **En déduire également la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.**
On a pour tout $x > 0$:
$$2xf(x) \leqslant 1 \implies f(x) \leqslant \frac{1}{2x}$$

et comme f est positive sur $\mathbb{R}$, on en déduit que :
$$0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{2x}$$
Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{2x} = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

6. **On admet que f est convexe sur $\mathbb{R}$.**
Tracer une allure de la courbe représentative de f ainsi que sa tangente en 0. *On donne* $\sqrt{\pi} \approx 1,77$.
L'équation de la tangente en 0 est : $y = f'(0)x + f(0) = -x + \sqrt{\pi}$.

7. **Justifier rapidement à l'aide de la question 2 que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.**
On a vu que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = -1 + 2xf(x)$.
Par récurrence simple, on a alors :
Si f est de classe $\mathscr{C}^k$ sur $\mathbb{R}$, alors f' est de classe $\mathscr{C}^k$ sur $\mathbb{R}$ par produit (car $f'(x) = -1 + 2xf(x)$) donc f est de classe $\mathscr{C}^{k+1}$ sur $\mathbb{R}$.

On pose $f^{(0)} = f$ et pour tout entier $k \geqslant 1$, on note $f^{(k)}$ la dérivée k-ième de f.
On admet que pour tout entier naturel n, la fonction f admet au voisinage de 0 un développement limité d'ordre n qui s'écrit : $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$ avec $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$.

8. (a) **Calculer a_0 et a_1.**
On a : $a_0 = \frac{f^{(0)}(0)}{0!} = f(0) = \sqrt{\pi}$ et $a_1 = \frac{f'(0)}{1!} = -1$.

(b) **Établir pour tout entier $n \geqslant 1$, la relation : $\forall x \in \mathbb{R}, \ f^{(n+1)}(x) = 2xf^{(n)}(x) + 2nf^{(n-1)}(x)$.**
Par récurrence. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P(n)$: $\forall x \in \mathbb{R}, \ f^{(n+1)}(x) = 2xf^{(n)}(x) + 2nf^{(n-1)}(x)$.
- Pour $n = 1$: il s'agit de montrer que $f''(x) = 2xf'(x) + 2f(x)$.
Or, on a vu que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = -1 + 2xf(x)$.
On a alors, en dérivant cette relation :
$$f''(x) = 2f(x) + 2xf'(x)$$
Ainsi, $P(1)$ est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\forall x \in \mathbb{R}, \ f^{(n+1)}(x) = 2xf^{(n)}(x) + 2nf^{(n-1)}(x)$.
On a alors, en dérivant cette relation :
$$f^{(n+2)}(x) = \left(f^{(n+1)}(x) =\right)' = 2f^{(n)}(x) + 2xf^{(n+1)}(x) + 2nf^{(n)}(x) = (2n+2)f^{(n)}(x) + 2xf^{(n+1)}(x)$$
Ainsi, $P(n+1)$ est vraie.

Ainsi, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a : $\forall x \in \mathbb{R}, \ f^{(n+1)}(x) = 2xf^{(n)}(x) + 2nf^{(n-1)}(x)$.

(c) **En exprimant $f^{(2k+2)}(0)$ en fonction de $f^{(2k)}(0)$, montrer que : $\forall k \geqslant 0, \ a_{2k+2} = \frac{1}{k+1}a_{2k}$.**
Soit $k \geqslant 0$. En posant $n = 2k+1 \geqslant 1$ et $x = 0$ dans la relation précédente, on a :
$$f^{(2k+2)}(0) = 2 \times 0 \times f^{(2k+1)}(0) + 2(2k+1)f^{(2k)}(0) \quad \text{soit} \quad f^{(2k+2)}(0) = 2(2k+1)f^{(2k)}(0)$$
Or, on a par définition :
$$f^{(2k+2)}(0) = a_{2k+2}(2k+2)! \quad \text{et} \quad f^{(2k)}(0) = a_{2k}(2k)!$$
On obtient donc pour tout $k \geqslant 0$:
$$\begin{aligned} f^{(2k+2)}(0) = 2(2k+1)f^{(2k)}(0) &\iff a_{2k+2}(2k+2)! = 2(2k+1)a_{2k}(2k)! \\ &\iff a_{2k+2} = 2\frac{(2k+1)!}{(2k+2)!}a_{2k} \\ &\iff a_{2k+2} = \frac{2}{2k+2}a_{2k} \\ &\iff a_{2k+2} = \frac{1}{k+1}a_{2k} \end{aligned}$$

(d) **En déduire que pour tout entier $k \geqslant 0$, $a_{2k} = \frac{1}{k!}\sqrt{\pi}$.**

Par récurrence. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $P(k)$: $a_{2k} = \frac{1}{k!}\sqrt{\pi}$.

- Pour $k = 0$: $a_0 = \sqrt{\pi} = \frac{1}{0!}\sqrt{\pi}$. Ainsi, $P(0)$ est vraie.
- Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que $a_{2k} = \frac{1}{k!}\sqrt{\pi}$.
  On a alors avec la relation de la question précédente :

$$a_{2(k+1)} = a_{2k+2} = \frac{1}{k+1}a_{2k} = \frac{1}{k+1}\frac{1}{k!}\sqrt{\pi} = \frac{1}{(k+1)!}\sqrt{\pi}$$

  Ainsi, $P(k+1)$ est vraie.

Ainsi, $\forall k \geqslant 0$, $a_{2k} = \frac{1}{k!}\sqrt{\pi}$.

Remarque :

On montrerait de même (et on ne demande pas de le faire) que :

$\forall k \geqslant 1$, $a_{2k+1} = \frac{2}{2k+1}a_{2k-1}$ ***puis que*** $a_{2k+1} = -\frac{4^k k!}{(2k+1)!}$.

Montrons quand même ce résultat par récurrence. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $P(k)$: $a_{2k+1} = -\frac{4^k k!}{(2k+1)!}$.

- Pour $k = 0$: $a_1 = -1 = -\frac{4^0 0!}{1!}$. Ainsi, $P(0)$ est vraie.
- Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que $a_{2k+1} = -\frac{4^k k!}{(2k+1)!}$.
  On a alors avec la relation admise :

$$\begin{aligned}
a_{2(k+1)+1} = a_{2k+3} &= \frac{2}{2k+3}a_{2k+1} \\
&= -\frac{2}{2k+3}\frac{4^k k!}{(2k+1)!} \\
&= -\frac{2}{(2k+3)}\frac{(2k+2)}{(2k+2)}\frac{4^k k!}{(2k+1)!} \\
&= -\frac{2(2k+2)4^k k!}{(2k+3)!} \\
&= -\frac{2^2(k+1)4^k k!}{(2k+3)!} \\
&= -\frac{4^{k+1}(k+1)!}{(2k+3)!}
\end{aligned}$$

  Ainsi, $P(k+1)$ est vraie.

Ainsi, $\forall k \geqslant 0$, $a_{2k+1} = -\frac{4^k k!}{(2k+1)!}$.