Math ECG 2. 2022-2023

Mathématiques Approfondies - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
H2B - Lycée Carnot, Paris 17e.

CARNOT

Exercices

Éléments de solution

Exercice 1.
Cette question apparait dans le Concours Blanc, Partie 2. On y renvoie pour la solution.

Exercice 2. (Inspiré par **ECRICOME 2019**)

Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire. On effectue une succession de tirages d'une boule dans cette urne. Après chaque tirage, on remet la boule tirée dans l'urne, et on rajoute dans l'urne une boule de couleur opposée à celle qui vient d'être tirée.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note X_k le nombre de boules blanches présentes dans l'urne juste avant le $(k+1)$-ième tirage. En particulier, on a $X_0 = 1$.

(1) **Simulation en Python.**

(a) Lorsqu'on tire une boule blanche, le nombre de boules noires augmente de 1 et inversement. Il y a `nB+nN` boules en tout dans l'urne et la probabilité d'obtenir une blanche est alors `nB/(nB+nN)`. Il suit que le programme demandé est le suivant :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

def simul_X(n) :
    nB=1
    nN=1
    for k in range(n) :
        if rd.rand( )<=nB/(nB+nN) : # si on pioche une blanche
            nN=nN+1 # une noire de plus dans l'urne
        else :
            nB = nB+1 # sinon, une blanche en plus
    return nB
```

(b) La fonction `mystere` renvoie la moyenne d'une liste `L` qui contient 1000 simulations de X_n, c'est donc une fonction qui renvoie une *estimation* de $E(X_n)$.
Les commandes qui suivent permettent de représenter l'évolution de (l'estimation de) $E(X_n)$ en fonction de n. On observe que $E(X_n)$ semble être une fonction affine de n, donc de la forme

$$E(X_n) = an + b.$$

On détermine par lecture graphique les valeurs de a et b. Pour $n = 0$,sait que $X_0 = 1$ donc $E(X_0) = 1$ ce qui donne $b = 1$ et pour $n = 10$, on semble passer par $E(X_{10}) = 6$ ce qui donne $10a + 1 = 6$ ou encore $a = 1/2$. On peut donc conjecturer que

$$E(X_n) = \frac{1}{2}n + 1.$$

(2) A l'issue du premier tirage, on peut avoir 1 ou 2 boules blanches dans l'urne selon qu'on a tiré une blanche ou une noire au premier tirage. Ainsi, $X_1(\Omega) = \{1; 2\}$. De plus,

$$P(X_1 = 1) = P(B_1) = \frac{1}{2} = P(N_1) = P(X_1 = 2).$$

C'est la loi uniforme sur $[\![1; 2]\!]$. En particulier, $E(X_1) = 3/2$ et $V(X_1) = \frac{2^2-1}{12} = 1/4$.

(3) (a) Après deux tirages, on a 1 , 2 ou 3 boules blanches, donc $X_2(\Omega) = \{1, 2, 3\}$. De plus,

$$P(X_2 = 1) = P(B_1 \cap B_2) = P(B_1)P_{B_1}(B_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6},$$

$$P(X_2 = 3) = P(N_1 \cap N_2) = P(N_1)P_{N_1}(N_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

Par complémentarité,

$$P(X_2 = 2) = 1 - P(X_2 = 1) - P(X_2 = 3) = 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}.$$

(b) Par définition,

$$E(X_2) = 1 \times P(X_2 = 1) + 2 \times P(X_2 = 2) + 3 \times P(X_2 = 3) = \frac{1}{6} + \frac{4}{3} + \frac{3}{6} = \frac{12}{6} = 2.$$

(4) À chaque tirage, le nombre de boules blanches augmente de 0 ou 1. Après k tirages, on a donc entre 1 et $k + 1$ boules blanches, ainsi

$$X_k(\Omega) = [\![1; k + 1]\!].$$

(5) Soient $i \in \mathbb{N}^*$ et $j \in X_k(\Omega)$. Entre deux tirages, le nombre de boules blanches est soit le même, soit augmente de 1. Ainsi, on peut déjà écrire que

$$\forall i \notin \{j; j + 1\}, \qquad P_{[X_k=j]}(X_{k+1} = i) = 0.$$

Ensuite, si $i = j$, on tire à nouveau une blanche au $(k + 1)-$ième tirage, sachant qu'on a j blanches dans l'urne après k tirages et donc $2 + k$ boules au total dans l'urne

$$P_{[X_k=j]}(X_{k+1} = j) = P_{[X_k=j]}(B_{k+1}) = \frac{j}{2 + k}.$$

De la même manière, si $i = j + 1$, alors on tire une des $k + 2 - j$ boules noires

$$P_{[X_k=j]}(X_{k+1} = j + 1) = P_{[X_k=j]}(N_{k+1}) = \frac{k + 2 - j}{k + 2}.$$

(6) Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé. Par la formule des probabilités totales appliquée au s.c.e $\{(X_k = n)\ n \in [\![1; k + 1]\!]\}$, on a, pour $i \in [\![1; k + 2]\!]$,

$$\begin{aligned} P(X_{k+1} = i) &= \sum_{n=1}^{k+1} P_{X_k=n}(X_{k+1} = i)P(X_k = n) \\ &= P_{X_k=i}(X_{k+1} = i)P(X_k = i) + P_{X_k=i-1}(X_{k+1} = i)P(X_k = i - 1) \\ &= \frac{i}{k + 2}P(X_k = i) + \frac{k + 3 - i}{k + 2}P(X_k = i - 1), \end{aligned}$$

ce qu'on voulait.

(7) On utilise la loi de X_2 et la formule précédente (avec $k=2$) pour déterminer la loi de X_3 (en gardant à l'esprit que $X_3(\Omega)=\{1,2,3,4\}$. On a

$$P(X_3=1)=\frac{1}{4}P(X_2=1)=\frac{1}{24},$$
$$P(X_3=2)=\frac{2}{4}P(X_2=2)+\frac{3}{4}P(X_2=1)=\frac{1}{3}+\frac{1}{8}=\frac{11}{24},$$
$$P(X_3=3)=\frac{3}{4}P(X_2=3)+\frac{2}{4}P(X_2=2)=\frac{1}{8}+\frac{1}{3}=\frac{11}{24}$$

et enfin

$$P(X_3=4)=\frac{1}{4}P(X_2=3)=\frac{1}{24},$$

ce qu'on peut résumer dans le tableau suivant:

i	1	2	3	4	
$P(X_3=i)$	1/24	11/24	11/24	1/24	1

(8) (a) On procède comme demandé par récurrence.

- <u>initialisation</u>. Pour $k=1$, on a $P(X_1=1)=1/2=1/(1+1)!$ et la formule est vraie.
- <u>hérédité</u>. Supposons que, pour un certain $k\in\mathbb{N}^*$, on ait

$$P(X_k=1)=\frac{1}{(k+1)!}.$$

Alors, par la question (6),

$$P(X_{k+1}=1)=\frac{1}{k+2}P(X_k=1)+0=\frac{1}{k+2}\times\frac{1}{(k+1)!}=\frac{1}{(k+2)!}$$

et la récurrence est terminée.

(b) C'est exactement la même chose; on a bien $P(X_1=2)=1/2$ et

$$P(X_{k+1}=k+2)=0+\frac{k+3-(k+2)}{k+2}\times P(X_k=k+1)=\frac{1}{k+2}\times\frac{1}{(k+1)!}=\frac{1}{(k+2)!}.$$

(c) Pour tout $k\in\mathbb{N}$, on pose : $a_k=(k+1)!\times\mathbb{P}([X_k=2])$.

Par définition,

$$\begin{aligned}a_{k+1} &= (k+2)!P(X_{k+1}=2)=(k+2)!\left[\frac{2}{k+2}P(X_k=2)+\frac{k+1}{k+2}P(X_k=1)\right]\\ &= 2(k+1)!P(X_k=2)+(k+1)!(k+1)\times\frac{1}{(k+1)!}\\ &= 2a_k+(k+1).\end{aligned}$$

On pose alors $b_k=a_k+k+2$. On a

$$\begin{aligned}b_{k+1} &= a_{k+1}+k+1+2\\ &= 2a_k+(k+1)+k+1+2\\ &= 2(a_k+k+2)\\ &= 2b_k\end{aligned}$$

Ainsi, (b_k) est géométrique de raison 2. Il suit qu'on peut écrire

$$b_k=2^{k-1}b_1=2^{k-1}(a_1+3)=2^{k-1}(2!P(X_1=2)+3)=2^{k+1}.$$

Il suit que

$$a_k = b_k - k - 2 = 2^{k+1} - k - 2,$$

et enfin

$$P(X_k = 2) = \frac{a_k}{(k+1)!} = \frac{2^{k+1} - k - 2}{(k+1)!},$$

ce qui est la formule attendue. Ouf!

(9) (a) C'est de loin la question la plus difficile de l'exercice (et du sujet de ce DS). On somme la formule de la Question (6) et on découpe et on utilise le théorème de transfert et la linéarité de l'espérance.

$$\begin{aligned}
E(X_{k+1}) &= \sum_{i=1}^{k+2} iP(X_{k+1} = i) \\
&= \sum_{i=1}^{k+2} i\left[\frac{i}{k+2}P(X_k = i) + \frac{k+3-i}{k+2}P(X_k = i-1)\right] \\
&= \frac{1}{k+2}\sum_{i=1}^{k+2} i^2 P(X_k = i) - \frac{1}{k+2}\sum_{i=1}^{k+2} i^2 P(X_k = i-1) + \frac{k+3}{k+2}\sum_{i=1}^{k+2} iP(X_k = i-1) \\
&= \frac{1}{k+2}\left(\sum_{i=1}^{k+1} i^2 P(X_k = i) - \sum_{i=2}^{k+2} i^2 P(X_k = i-1)\right) + \frac{k+3}{k+2}\sum_{i=2}^{k+2} iP(X_k = i-1) \\
&= \frac{1}{k+2}\left(\sum_{i=1}^{k+1} i^2 P(X_k = i) - \sum_{j=1}^{k+1} (j+1)^2 P(X_k = j)\right) + \frac{k+3}{k+2}\sum_{j=1}^{k+1} (j+1)P(X_k = j) \\
&= \frac{1}{k+2}\left(E(X_k^2) - E((X_k+1)^2)\right) + \frac{k+3}{k+2}E(X_k+1) \\
&= \frac{1}{k+2}\left(E(X_k^2) - E(X_k^2) - 2E(X_k) - 1\right) + \frac{k+3}{k+2}E(X_k) + \frac{k+3}{k+2} \\
&= \frac{k+1}{k+2}E(X_k) + 1,
\end{aligned}$$

ce qu'on voulait.

(b) Si la question précédente était vraiment difficile, celle-ci n'est qu'une simple récurrence (qui utilise bien sûr la dernière formule obtenue).

- <u>initialisation</u>. Pour $k = 1$,

  $$E(X_1) = \frac{3}{2} = \frac{1+2}{2},$$

  et la formule est vraie.

- <u>hérédité</u>. Supposons que, pour un certain $k \in \mathbb{N}^*$, on ait

  $$E(X_k) = \frac{k+2}{2}.$$

  Alors, par la question précédente,

  $$E(X_{k+1}) = \frac{k+1}{k+2}E(X_k) + 1 = \frac{k+1}{k+2} \times \frac{k+2}{2} + 1 = \frac{k+1}{2} + 1 = \frac{k+3}{2},$$

  ce qui est bien la formule au rang $k+1$ et termine la récurrence. On constate que la formule démontrée est bien la formule conjecturée avec Python!

(c) La situation ici est symétrique par rapport aux couleurs des boules. En permutant les couleurs des boules noires ou blanches et avec le même raisonnement, on obtient exactement les mêmes résultats pour Y_k que pour X_k, rien ne change, ce qui donne notamment $E(X_k) = E(Y_k)$. Mais comme il est clair que $X_k + Y_k = k + 2$ car après k tirages, le total des boules blanches et noires fait nécessairement $k + 2$, la linéarité de l'espérance donne

$$k + 2 = E(X_k + Y_k) = E(X_k) + E(Y_k) = 2E(X_k)$$

et on retrouve

$$E(X_k) = \frac{k+2}{2}.$$

(10) (a) Par linéarité de l'espérance, la variable $X_k/(k+2)$ admet une espérance et

$$E\left(\frac{X_k}{k+2}\right) = \frac{1}{2}$$

Des propriétés de la variance et du résultat admis dans l'énoncé, on déduit

$$V\left(\frac{X_k}{k+2}\right) = \frac{1}{(k+2)^2} V(X_k) = \frac{1}{12(k+2)}.$$

En appliquant Bienaymé-Tchebychev, on a alors, pour $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} P\left(\left|\frac{X_k}{k+2} - \frac{1}{2}\right| > \varepsilon\right) &= P\left(\left|\frac{X_k}{k+2} - E\left(\frac{X_k}{k+2}\right)\right| > \varepsilon\right) \\ &\leq \frac{V\left(\frac{X_k}{k+2}\right)}{\varepsilon^2} \\ &\leq \frac{1}{12\varepsilon(k+2)} \\ &\underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

(b) Après k tirages, il y a X_k boules blanches et $k + 2$ boules en tout, la quantité $X_k/(k + 2)$ représente donc la proportion de boules blanches après k tirages. Le résultat précédent peut s'interpréter comme le fait que, lorsque k devient grand, cette proportion *tend vers* (au sens de la *convergence en probabilités*) vers $1/2$ donc vers une répartition égale de boules noires et de boules blanches.

Exercice 3.

On étudie le jeu suivant: X_1 et X_2 étant deux variables indépendantes de loi uniforme sur $[0; 1]$, un joueur observe d'abord X_1. S'il décide d'en rester là, il gagne la valeur observée. S'il décide de continuer, il observe et gagne X_2. On note G la v.a. correspondant au gain du joueur.

(1) Si le joueur continue systématiquement, son gain est égal à X_2 et $E(G) = E(X_2) = 1/2$ car $X_2 \hookrightarrow \mathcal{U}([0; 1])$.

(2) Dans un deuxième temps, il décide de continuer et d'observer X_2 si et seulement si $X_1 \leq s$, où $s \in [0; 1]$ est un seuil qu'il se fixe à l'avance.

(a) Si $X_1 < s$ (et donc $\mathbb{1}_{X_1<s} = 1$ et $\mathbb{1}_{X_1\leq s} = 0$) alors on continue et le gain sera égal à X_2, c'est à dire à $\mathbb{1}_{X_1<s}X_2$. Sinon, le gain sera égal à X_1 ou a $\mathbb{1}_{X_1\leq s}X_1$. On a bien

$$G = \mathbb{1}_{X_1\geq s}X_1 + \mathbb{1}_{X_1<s}X_2.$$

(b) Sans difficulté

```
def simul_G(s) :
    G=np.rand()
    if G<s : # si X1 < s, on rejoue
        G=np.rand( )
```

```
    return G
```

(c) Dans ce cas $E(G) = E(\mathbb{1}_{X_1 \geq s} X_1) + E(\mathbb{1}_{X_1 \geq s} X_1)$. Mais, X_1 et X_2 étant indépendantes, le lemme des coalitions permet d'affirmer que $\mathbb{1}_{X_1<s}$ et X_2 sont indépendantes. Donc

$$E(\mathbb{1}_{X_1<s} X_2) = E(\mathbb{1}_{X_1<s}) E(X_2) = P(X_1 < s) E(X_2) = \frac{s}{2}.$$

De plus, par le théorème de transfert et le résultat établi en préambule,

$$\begin{aligned} E(\mathbb{1}_{X_1 \geq s} X_1) &= \int_s^1 t \mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2}\right]_s^2 \\ &= \frac{1-s^2}{2}. \end{aligned}$$

Au final,

$$E(G) = \frac{1 - s^2 + s}{2}.$$

(d) On regarde où la fonction $s \mapsto 1 - s^2 + s$ est maximale. Sa dérivée vaut $1 - 2s$ et s'annule en $s^* = 1/2$ où on voit sans difficulté que $E(G)$ est maximale. Ce résultat est d'ailleurs assez intuitif. Dans ce cas, l'espérance vaut

$$E(G) = \frac{5}{8} > \frac{1}{2},$$

ce qui est donc un peu mieux que la première stratégie.

(3) Dans cette optique très avantageuse, on aurait $G = \max(X_1, X_2)$. On obtient alors $E(G)$ en déterminant la loi du max, question trèèèèèès classique. On commence par la fonction de répartition

$$\begin{aligned} F_G(x) = P(\max(X_1, X_2) \leq x) &= P([X_1 \leq x] \cap [X_2 \leq x]) \\ &= P(X_1 \leq x) P(X_2 \leq x) \qquad \text{(par indépendance de } X_1 \text{ et } X_2) \\ &= F_{X_1}(x)^2 \\ &= \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ x^2, & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1, & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Cette fonction est bien la fonction de répartition d'une variable à densité (continue partout sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur chacun des morceaux) donc G est bien une v.a à densité. Une densité est donnée par

$$f_G(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Il suit que

$$E(G) = \int_0^1 2x^2 \mathrm{d}x = \left[\frac{2x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

C'est clairement la stratégie la plus avantageuse !

Exercice 4. On rappelle que si a, b sont deux réels, le *maximum* de a et de b est défini par

$$\max(a, b) = \begin{cases} a, & \text{si } a \geq b \\ b, & \text{si } b \geq a \end{cases}$$

(1) Soit $x \in \mathbb{R}$ **fixé**.

(a) Sur $]-\infty; x[$, la fonction est continue comme constante égale à x. Sur $]x; +\infty[$ la fonction est affine (c'est $t \mapsto t$). Il faut vérifier que c'est continu en x. Mais

$$\lim_{t \to x^+} \max(x, t) = \lim_{t \to x^+} t = x = \lim_{t \to x^-} \max(x, t)$$

et $t \longmapsto \max(x, t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

(b) Comme indiqué, on distingue les cas:

- Si $x < 0$, alors pour tout $t \in [0;1]$, $\max(x,t) = t$ et
$$y = \int_0^1 \max(x,t)\mathrm{d}t = \int_0^1 t\mathrm{d}t = \frac{1}{2}.$$
- Si $0 \leq x < 1$, il faut découper l'intégrale en 2
$$\begin{aligned} y &= \int_0^1 \max(x,t)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^x \max(x,t)\mathrm{d}t + \int_x^1 \max(x,t)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^x x\mathrm{d}t + \int_x^1 t\mathrm{d}t \\ &= x^2 + \left[\frac{t^2}{2}\right]_x^1 \\ &= x^2 + \frac{1-x^2}{2} \\ &= \frac{x^2+1}{2}. \end{aligned}$$
- Si $x \geq 1$, alors pour tout $t \in [0;1]$, $\max(x,t) = x$ et
$$y = \int_0^1 x\mathrm{d}t = x.$$

Au final,
$$y = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1+x^2}{2}, & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ x, & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

On considère alors une variable aléatoire X sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et on définit la variable aléatoire Y comme suit
$$Y(\omega) = \int_0^1 \max(X(\omega), t)\mathrm{d}t, \qquad \omega \in \Omega.$$

(2) Si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, alors $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et donc pour tout ω, $X(\Omega) \geq 1$ ce qui donne, d'après la Question (1b), que $Y(\omega) = X(\omega)$ et donc $X = Y$.

(3) On considère la variable aléatoire X définie par $X(\Omega) = \{-1;0;1\}$ et
$$P(X=-1) = P(X=1) = \frac{1}{4}.$$

(a) Comme $P(X=-1) + P(X=0) + P(X=1) = 1$, on a
$$P(X=0) = 1 - 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

(b) On utilise la Question (1b). Si $X(\omega) = -1 < 0$, alors $Y(\omega) = 1/2$. Si $X(\omega) = 0$, alors $Y(\omega) = 1/2$ également. Enfin, si $X(\omega) = 1$, alors $Y(\omega) = X(\omega) = 1$. Les seules possibilités pour Y sont $1/2$ et 1, on a bien

$$Y(\Omega) = \left\{\frac{1}{2}; 1\right\}.$$

(c) C'est une loi finie sans difficulté d'après ce qui précède.

$$P\left(Y = \frac{1}{2}\right) = P([X = -1] \cup [X = 0]) = P(X = -1) + P(X = 0) = \frac{3}{4}, \qquad P(Y = 1) = P(X = 1) = \frac{1}{4}.$$

Il suit que,

$$\begin{aligned} E(Y) &= \frac{1}{2} \times P(Y = 1/2) + 1 \times P(Y = 1) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{5}{8} \\ E(Y^2) &= \frac{1}{4} \times P(Y = 1/2) + 1 \times P(Y = 1) = \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{7}{16} \\ V(Y) &= E(Y^2) - E(Y)^2 \qquad \text{(König-Huyguens)} \\ &= \frac{7}{16} - \left(\frac{5}{8}\right)^2 \\ &= \frac{3}{64}. \end{aligned}$$

(4) On suppose maintenant que $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, où $\lambda > 0$.

(a) On sait que $X(\Omega) = \mathbb{N}$. Si $X(\omega) = 0$, alors $Y(\omega) = 1/2$. Si, $X(\omega) \geq 1$, alors $Y(\omega) = X(\omega)$. On a bien

$$Y(\Omega) = \mathbb{N}^* \cup \left\{\frac{1}{2}\right\}.$$

(b) Il suit même, sans difficulté que

$$P\left(Y = \frac{1}{2}\right) = P(X = 0) = e^{-\lambda},$$

et, pour tout $k \geq 1$,

$$P(Y = k) = P(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

(c) Il est facile de voir que Y admet une espérance.

$$\begin{aligned} Y \text{ admet une espérance} &\iff \sum_{a \in Y(\Omega)} aP(Y = a) \text{ converge absolument} \\ &\iff \sum_{k \geq 1} kP(Y = k) \text{ converge} \\ &\iff \sum_{k \geq 1} kP(X = k) \text{ converge} \end{aligned}$$

Or, on sait que X admet une espérance donc la dernière série converge et Y admet aussi une espérance. De plus

$$\begin{aligned} E(Y) &= \frac{1}{2}P\left(Y=\frac{1}{2}\right)+\sum_{k=1}^{+\infty} kP(Y=k) \\ &= \frac{e^{-\lambda}}{2}+E(X) \\ &= \frac{e^{-\lambda}}{2}+\lambda \end{aligned}$$

Exercice 5.

Soit f la fonction définie sur $[0;1[$ par

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

(1) La fonction $u\mapsto\sqrt{u}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $x\in[0;1[$, $1-x>0$. Par composition, f est bien de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0;1[$.

(2) (a) Soit $x\in]0;1[$. C'est parti.

- <u>initialisation.</u> Pour $n=0$. On a bien

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{0} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!}+\int_0^x f^{(1)}(t)\mathrm{d}t &= f(0)+\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t \\ &= f(0)+[f(t)]_0^x = f(0)+f(x)-f(0) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

et la relation est vérifiée pour $n=0$.

- <u>hérédité.</u> Supposons que, pour un certain $n\in\mathbb{N}$, on ait

$$\sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!}+\int_0^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\mathrm{d}t=f(x).$$

On commence par traiter l'intégrale du membre de gauche au rang $n+1$. Comme suggéré, on va faire une petite intégration par parties. On pose

$$\left\{\begin{array}{rcl} u'(t) &=& \frac{(x-t)^n}{n!} \\ v(t) &=& f^{(n+1)}(t) \end{array}\right. \rightsquigarrow \left\{\begin{array}{rcl} u(t) &=& -\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \\ v'(t) &=& f^{(n+2)}(t) \end{array}\right.$$

Comme f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0;1[$, les fonctions u et v sont notamment de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;x]$ rendant cette intégration par parties licite. Ceci donne

$$\begin{aligned} \int_0^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\mathrm{d}t &= \left[-f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_0^x+\int_0^x f^{(n+2)}(t)\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{d}t \\ &= f^{(n+1)}(0)\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}+\int_0^x f^{(n+2)}(t)\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Mais alors

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!}+\int_0^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\mathrm{d}t \qquad (\text{ par HR}) \\ &= \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!}+f^{(n+1)}(0)\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}+\int_0^x f^{(n+2)}(t)\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!}+\int_0^x f^{(n+2)}(t)\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

ce qui est bien la formule au rang $n+1$ et termine la récurrence.

(b) Il s'agit de dériver des fonctions racines...

- initialisation. Pour $n=0$,

$$f^{(0)}(x) = f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} = (1-x)^{-\frac{1}{2}} = \frac{(2\times 0)!}{2^{2\times 0}0!}(1-x)^{-0-\frac{1}{2}},$$

et la formule est vraie pour $n=0$.

- hérédité. Supposons que, pour un certain $n\in\mathbb{N}$, on ait

$$f^{(n)}(x) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}(1-x)^{-n-\frac{1}{2}}.$$

Alors,

$$\begin{aligned}
f^{(n+1)}(x) &= \left(f^{(n)}\right)'(x) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\left((1-x)^{-n-\frac{1}{2}}\right)' \\
&= \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\left(-\left(-n-\frac{1}{2}\right)\right)\left((1-x)^{-n-\frac{1}{2}-1}\right) \\
&= \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\left(\frac{2n+1}{2}\right)\left((1-x)^{-(n+1)-\frac{1}{2}}\right) \\
&= \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\left(\frac{(2n+2)(2n+1)}{2\times 2(n+1)}\right)\left((1-x)^{-(n+1)-\frac{1}{2}}\right) \\
&= \frac{(2(n+1))!}{2^{2(n+1)}(n+1)!}\left((1-x)^{-(n+1)-\frac{1}{2}}\right),
\end{aligned}$$

ce qu'on voulait pour terminer cette récurrence.

(c) Dans le but d'utiliser la Question (2a), on commence par écrire que

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{(2k)!}{2^{2k}k!k!} = \binom{2k}{k}\left(\frac{1}{4}\right)^k$$

et

$$\begin{aligned}
f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!} &= \frac{(2(n+1))!}{2^{2(n+1)}(n+1)!n!}\left((1-t)^{-\frac{3}{2}}\right)\frac{(x-t)^n}{(1-t)^n} \\
&= \frac{(n+1)(2n+2)!}{2^{2n+2}(n+1)!(n+1)!}\left((1-t)^{-\frac{3}{2}}\right)\left(\frac{(x-t)}{(1-t)}\right)^n \\
&= \frac{(n+1)}{2^{2n+2}}\binom{2n+2}{n+1}\left((1-t)^{-\frac{3}{2}}\right)\left(\frac{(x-t)}{(1-t)}\right)^n
\end{aligned}$$

et la formule obtenue à la Question (2a) donne immédiatement

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k}\left(\frac{x}{4}\right)^k + \frac{n+1}{2^{2n+2}}\binom{2n+2}{n+1}\int_0^x (1-t)^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \mathrm{d}t.$$

(3) Soit $x\in]0;1[$ fixé.

(a) La fonction φ_x est dérivable sur $[0;x]$ comme quotient de polynomes dont le dénominateur ne s'annule pas. On a

$$\varphi_x'(t) = \frac{-(1-t)+x-t}{(1-t)^2} = \frac{x-1}{(1-t)^2} < 0$$

car $x<1$ et φ_x est bien décroissante sur l'intervalle.

(b) Observant que la quantité sous l'intégrale est positive sur $[0;x]$, la positivité de l'intégrale garantit bien l'inégalité de gauche de l'encadrement demandé.
La fonction φ_x étant décroissante sur $[0;x]$, et la fonction $u \mapsto u^n$ étant elle croissante sur $\mathbb{R}_+$, on a, pour tout $t \in [0;x]$,

$$\left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n = \varphi_x(t)^n \leq \varphi(0)^n = x^n.$$

Il suit, par positivité de l'intégrale, que

$$\int_0^x (1-t)^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \mathrm{d}t \leq x^n \int_0^x (1-t)^{-\frac{3}{2}} \mathrm{d}t = x^n \left[2(1-t)^{-\frac{1}{2}}\right]_0^x$$

Tout ceci donne bien

$$0 \leq \int_0^x (1-t)^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \mathrm{d}t \leq 2x^n \left(\frac{1}{\sqrt{1-x}} - 1\right).$$

(c) On **admet** que

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}, \qquad n \to +\infty.$$

Par définition des coefficients binomiaux

$$\binom{2n+2}{n+1} = \frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2} \sim \frac{\sqrt{2\pi(2n+2)}(2n+2)^{(2n+2)}e^{-2n-2}}{\left(\sqrt{2\pi(n+1)}(n+1)^{(n+1)}e^{-n-1}\right)^2} = \frac{2^{2n+2}\sqrt{n+1}}{\sqrt{\pi}(n+1)}.$$

Mais alors,

$$\frac{n+1}{2^{2n+2}}\binom{2n+2}{n+1} \sim \frac{(n+1)}{2^{2n+2}} \frac{2^{2n+2}\sqrt{n+1}}{\sqrt{\pi}(n+1)} = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{\pi}} \sim \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}}, \qquad n \to +\infty.$$

(d) La question précédente permet d'affirmer que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{2^{2n+2}}\binom{2n+2}{n+1} = 0.$$

Celle encore avant donne, par le théorème des gendarmes, car $x^n \to 0$ (vu que $0 < x < 1$), que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^x (1-t)^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \mathrm{d}t = 0.$$

Par produit, on peut donc conclure que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{2^{2n+2}}\binom{2n+2}{n+1} \int_0^x (1-t)^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \mathrm{d}t = 0.$$

(4) Soit x un réel de $]0;1[$. D'après la Question (2c) et la question précédente,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n \binom{2k}{k}\left(\frac{x}{4}\right)^k &= f(x) - \frac{n+1}{2^{2n+2}}\binom{2n+2}{n+1}\int_0^x (1-t)^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \mathrm{d}t \\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x).\end{aligned}$$

Ainsi, la série $\displaystyle\sum_{k\geq 0}\binom{2k}{k}\left(\frac{x}{4}\right)^k$ converge et sa somme vérifie

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{k=0}^{+\infty}\binom{2k}{k}\left(\frac{x}{4}\right)^k.$$