Chapitre III. Des séries et des hommes

1 Généralités

Définition

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite. La **série** de terme général u_n est la suite (S_n) définie par

$$\forall n \geq n_0, \quad S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k.$$

Le terme S_n est appelé la **somme partielle d'indice** n de la série. La série est notée $\sum_{n\geq n_0} u_n$.

☞ Les outils d'études des suites peuvent alors s'appliquer aux séries dès lors qu'on considère la suite des sommes partielles.

avec Python

☞ Si l'on dispose d'un programme qui renvoie la liste des termes consécutifs (jusqu'au rang n) de la suite (u_n), on peut obtenir la liste des termes consécutifs de la suite des sommes partielles grâce à la commande `np.cumsum( )`.

Autrement, on utilise une boucle `for`.

Définition

La série $\sum_{n\geq n_0} u_n$ est dite

- **convergente** si et seulement si la suite $(S_n)_{n\geq n_0}$ des sommes partielles converge. Dans ce cas, sa limite est appelée la **somme** de la série et on note
$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k.$$
- **divergente** si et seulement si $(S_n)_{n\geq n_0}$ a une limite infinie ou pas de limite.

☞ Étudier la **nature d'une série**, c'est déterminer si elle converge ou pas. Dans le premier cas, on cherche alors à expliciter sa somme si c'est possible, mais ce n'est souvent pas le cas.

À retenir!

☠ La quantité $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ est une **limite** (qui pourrait donc ne pas exister).

☞ On n'écrira donc **jamais** $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ **avant** d'avoir au préalable justifié la convergence de la série!

☞ Soit n_0 un entier **fixé**. Remarquant qu'on peut décomposer (par la relation de Chasles) une somme partielle

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k + \sum_{k=n_0}^{n} u_k,$$

il est clair que la nature de la série ne dépend par de la somme des n_0 premiers termes, celle-ci étant constante. La valeur du premier terme de la série ne modifie donc pas le caractère convergent ou divergent mais en revanche, cela modifie, en cas de convergence, la valeur de la somme.

Définition

Soit $\sum_{k\geq n_0} u_k$ une série convergente. On appelle **reste** de la série, et on note (R_n) la suite définie, pour $n \geq n_0$, par

$$R_n = \sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=n_0}^{n} u_k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

À retenir!

☞ Il découle immédiatement de la définition que le reste d'une série convergente tend vers 0:

$$\left(\sum_{k\geq n_0} u_k \text{ converge}\right) \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} R_n = 0.$$

Exercice 1. On considère la série $\sum_{n\geq 1} 1/n^2$, dont on note S_n la somme partielle d'indice n.

(1) Montrer que la suite (S_n) est croissante.
(2) Montrer que, pour tout $n \geq 2$, on a $\dfrac{1}{n^2} \leq \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}$.
(3) En déduire que la série est convergente. On note S sa somme.
(4) Déduire également de la Question (2), que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $p \geq n$, on a

$$\sum_{k=n+1}^{p} \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{p}.$$

En déduire une majoration du reste.
(5) Écrire un programme en Python permettant d'obtenir une valeur approchée à 10^{-3} de S.

1.1 Propriétés des séries convergentes

☞ On a un lien très utile entre somme(s) partielle(s) et terme général

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n-1} u_k + u_{n+1} = S_{n-1} + u_n \Longleftrightarrow u_n = S_n - S_{n-1}.$$

En particulier, il en découle immédiatement le résultat suivant.

À connaître sur le bout des doigts

Si la série $\sum u_n$ est convergente, alors la suite (u_n) converge vers 0.

☠ La convergence vers 0 du terme général est une condition **nécessaire** mais absolument pas suffisante. L'exemple classique est celui de la série harmonique, proposé ci-dessous.

Exercice 2. Soit H_n la somme partielle d'indice n de la *série harmonique* $\sum \frac{1}{k}$.

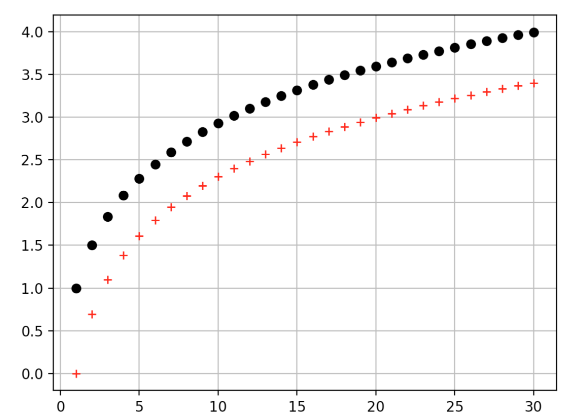
(1) Que vérifie le terme général de cette série?
(2) On dispose du code suivant dont l' exécution renvoie l'affichage ci-contre. Que peut-on conjecturer ?

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def serie_h(n):
    return np.cumsum([1/k for
        k in range(1, n+1)])

n=30
N=[k for k in range(1, n+1)]
Y=serie_h(n)
Z=[np.log(k) for k in N]
plt.grid()
plt.plot(N, Y, 'ko')
plt.plot(N, Z, 'k+',
    color='red')
plt.show()
```

Affichage Python



(3) Montrer que, pour tout $n \geq 1$,
$$H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}.$$
(4) En déduire la divergence de la série harmonique.

À retenir!

☞ En revanche, la non convergence vers 0 du terme général permet immédiatement de conclure à la divergence de la série. On dit d'ailleurs dans ce cas que la série **diverge grossièrement**.

Proposition

Soient $\sum_{n\geq n_0} u_n$ et $\sum_{n\geq n_0} v_n$ deux séries convergentes, et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors la série $\lambda \sum u_n + \mu \sum v_n$, de terme général $(\lambda u_n + \mu v_n)$, est encore convergente. Sa somme est égale à la combinaison linéaire correspondante des sommes des deux séries.

☠ La réciproque de la proposition précédente est fausse. Il est tout à fait possible que $\sum(u_n + v_n)$ converge sans qu'aucune des deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ne converge. Par exemple,
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}.$$
La série $\sum 1/k(k+1)$ est convergente, mais les deux séries $\sum 1/k$ et $\sum 1/(k+1)$ divergent.

2 Techniques et séries usuelles

On présente quelques techniques qui permettent de conclure à la nature d'une série.

2.1 Séries télescopiques

Proposition

Une suite (u_n) est convergente si et seulement si la série $\sum(u_{n+1}-u_n)$ est convergente. Auquel cas, on a
$$\sum_{k=0}^{+\infty}(u_{k+1}-u_k)=\lim_{n\to+\infty}u_n-u_0.$$

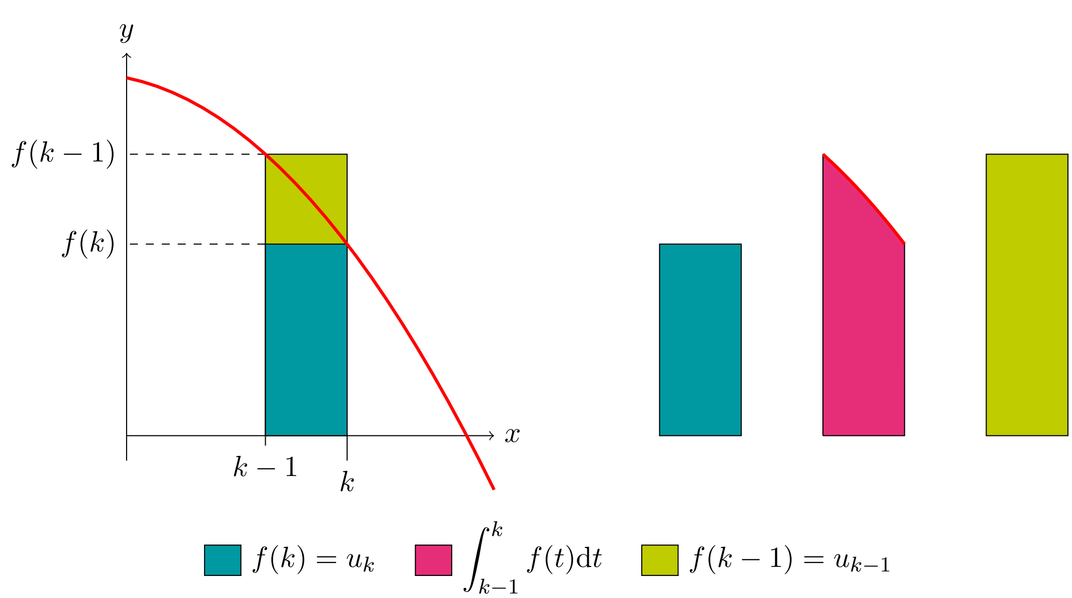
Exercice 3. Soient f la fonction définie sur $[0;1]$ par $f : x \mapsto x-x^2$ et (u_n), de premier terme $u_0 \in]0;1[$, vérifiant la relation de récurrence
$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad u_{n+1}=f(u_n)=u_n-u_n^2.$$

(1) Dresser le tableau de variations de f.
(2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in]0;1[$.
(3) Étudier la monotonie puis la convergence de (u_n). Déterminer sa limite.
(4) Montrer que la série $\sum u_n^2$ converge et préciser sa somme.

2.2 Comparaison série/intégrale

Si le terme général d'une série est donnée par une formule du type $u_n = f(n)$, où f est une fonction monotone (souvent décroissante) sur $\mathbb{R}_+$, on peut obtenir, par positivité de l'intégrale, des inégalités ou encadrements *du type*
$$\int_n^{n+1} f(t)\mathrm{d}t \leq u_n \qquad \text{ou} \qquad u_n \leq \int_{n-1}^{n} f(t)\mathrm{d}t,$$
qui, en passant à la somme, donnent une estimation des sommes partielles à l'aide de $\displaystyle\int_{n_0}^{n} f(t)\mathrm{d}t$.

☞ On peut visualiser la méthode en comparant la somme partielle, interprétée comme la somme des aires des rectangles (de hauteur u_k et de largeur 1), avec l'intégrale, qui correspond à l'aire sous la courbe.



Exemple

L'exemple le plus classique est celui qui permet d'encadrer la somme partielle de la série harmonique (et suite d'obtenir de l'équivalent en $\ln(n)$)

$$\ln(n) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq 1 + \ln(n)$$

(On pourra notamment regarder le sujet **ECRICOME 2018**).

À retenir!

☞ On conclut ensuite avec un théorème de comparaison.

Exercice 4.

(1) Étudier les variations de $x \longmapsto \dfrac{1}{x\ln(x)}$ et en déduire que, pour tout entier $k \geq 2$,

$$\frac{1}{k\ln(k)} \geq \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln(x)}.$$

(2) Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$,

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} \geq \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2)).$$

(3) Conclure quant à la nature de la série de terme général $1/k\ln(k)$.

2.3 Séries usuelles : géométriques (dérivées) et série exponentielle

À retenir!

☞ Lorsque le terme général d'une série s'écrit comme combinaison linéaire de termes généraux de séries (usuelles) qu'on sait être convergentes, on peut conclure à la convergence de la série.

À connaître sur le bout des doigts

Séries géométriques et dérivées.

Les séries

$$\sum_{n\geq 0} q^n, \qquad \sum_{n\geq 1} nq^{n-1}, \qquad \text{et} \qquad \sum_{n\geq 2} n(n-1)q^{n-2}$$

sont convergentes si et seulement si $|q| < 1$. Dans ce cas,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}, \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}, \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} = \frac{2}{(1-q)^3}.$$

La **série exponentielle** $\sum \dfrac{x^n}{n!}$ converge pour tout réel x. De plus, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$.

☞ On utilise énormément ces résultats en probabilités; les séries géométriques apparaissent dès qu'intervient la *loi géométrique*, la série exponentielle dès qu'intervient la *loi de Poisson*.

Exercice 5. Soit $p \in]0,1[$. Montrer que la série $\sum k^2(p^k(1-p) + (1-p)^k p)$ converge et calculer sa somme.

2.4 Séries de Riemann

La comparaison série/intégrale avec la fonction $t \mapsto t^{-\alpha}$ (pour $\alpha > 0$) permet d'obtenir le résultat suivant, essentiel dans le cadre de l'étude des séries; les séries de Riemann étant *les* séries de référence.

À connaître sur le bout des doigts

Critère de convergence des séries de Riemann

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha} \quad \text{converge} \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha > 1.$$

☞ On retrouve notamment que la série harmonique $\sum 1/k$ diverge, alors que la série $\sum 1/k^2$ converge.

3 Séries à termes positifs

Dans toute cette section, on considère des séries définies par des suites dont **tous les termes sont positifs**.

À retenir!

☞ Lorsque l'on utilise un des résultats suivants, il est indispensable d'avoir justifié et de bien mentionner que la série est à termes positifs.

3.1 Une première observation

☞ Il est clair que si $\sum u_n$ est une série à termes positifs, la suite (S_n) des sommes partielles est **croissante** (à chaque rang on ajoute une quantité positive)

$$S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geq 0.$$

Le théorème de convergence monotone permet alors d'établir le résultat suivant.

Proposition

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs.

(i) La série est convergente si et seulement si ses sommes partielles sont majorées.
(ii) Si la série diverge alors elle diverge vers $+\infty$.

3.2 Critère de comparaison

À connaître sur le bout des doigts

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles qu'à partir d'un certain rang,

$$0 \leq u_n \leq v_n.$$

Alors,
(i) Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.
(ii) Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

Exercice 6. On considère la série $\displaystyle\sum_{k\geq 0} \frac{1}{4^k + \ln(k+1) + 1}$.

(1) Montrer que cette série converge. On note S sa somme.
(2) On souhaite déterminer une valeur approchée de S.

(a) Montrer que :

$$\left|\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{4^k+\ln(k)+1} - S\right| \leq \frac{1}{3\times 4^n}.$$

(b) Écrire une fonction Python `S_ap(eps)` prenant en paramètre un réel `eps` et renvoyant une valeur approchée de S à `eps` près.

À retenir!

✐ Pour utiliser ce critère, on travaille sur le terme général.
On rédige **soigneusement** le raisonnement.

- On commence par vérifier et justifier que celui-ci est positif (au moins à partir d'un certain rang);
- On compare au terme général d'une série usuelle (bien souvent une série de Riemann)
- On peut enfin conclure.

3.3 Convergence absolue

Dans ce paragraphe, la série de terme général u_n n'est plus forcément une série à termes positifs.

Définition

On dit que la série $\sum u_n$ **converge absolument** (ou est **absolument convergente**) si la série $\sum |u_n|$ est convergente.

À connaître sur le bout des doigts

Théorème. Si la série $\sum u_n$ est absolument convergente alors elle est aussi convergente.

À retenir!

☠ La réciproque de cette propriété est fausse. Le contre-exemple classique est celui de la série harmonique alternée, proposé ci-dessous.

Exercice 7. (Série Harmonique alternée). On considère la série $\sum_{n\geq 1}(-1)^n/n$ dont on note (S_n) la suite des sommes partielles.

(1) Montrer que (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.
(2) En déduire la nature de la série harmonique alternée. Est-elle absolument convergente?

☞ La convergence absolue permet de ramener l'étude à une série à termes positifs, ce qui permet d'utiliser les résultats de comparaison associés à ces séries.

☞ On commence donc par étudier la série de terme général $|u_n|$ et si celle-ci converge, on peut affirmer grâce au théorème ci-avant que $\sum u_n$ converge.

Exercice 8. Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2+\ln(2n)}$.

4 Incontournable

Question type de sujet de concours

On considère une variable aléatoire X suivant une loi géométrique de paramètre p. Le but de l'exercice est de montrer que $Y = 1/X$ admet une espérance et de préciser sa valeur.

(1) Exhiber une série dont la convergence est équivalente à l'existence de $E(Y)$.

(2) Monter que, pour tout $x \in [0;1[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t$$

(3) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$0 \leq \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t \leq \frac{1}{1-x} \times \frac{1}{n+1}.$$

En déduire que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t = 0.$$

(4) Conclure.

5 Autres d'exercices

Exercice 9. Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leurs sommes :

1) $\displaystyle\sum_{k\geq 2} \frac{\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)}{\ln(k)\ln(k+1)}$ 2) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \ln\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)$ 3) $\displaystyle\sum_{k\geq 0} \frac{3^n+n2^n}{n!}$ 4) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n(n-1)}{5^n}$

5) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n^2}{5^n}$, 6) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{4n^2+5n}{5^n}$, 7) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n n}{3^n}$, 8) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n n^2}{3^n}$,

9) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n n(n-1)}{3^n}$ 10) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}$ 11) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{4(-1)^{n+1}}{n!}$ 12) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{3^n}{(n+1)!}$

13) $\displaystyle\sum_{k\geq 0} \frac{3n+2^n}{4^n}$ 14) $\displaystyle\sum_{k\geq 0} (-1)^n \frac{n^2+1}{3^n}$.

Exercice 10. On considère la série de terme général

$$u_n = \frac{n^3+2n^2-4n+1}{n!}, \qquad n \in \mathbb{N}^*.$$

(1) Montrer qu'il existe des réels (que l'on déterminera) a, b, c, d tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$n^3+2n^2-4n+1 = a + bn + cn(n-1) + dn(n-1)(n-2).$$

(2) Conclure quant à la convergence de $\sum u_n$ et calculer sa somme.

Exercice 11. Montrer la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} w_n$, où $\displaystyle w_n = 2^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{4^k}{k!}$.

Exercice 12. (D'après **EML 2015**) On considère l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto f(x) = x^3 e^x$.

(1) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{f(n)}$ converge. On note S sa somme.

(2) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \left| S - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{f(n)} \right| \leq \frac{1}{(e-1)e^n}.$$

(3) En déduire une fonction en Python qui calcule une valeur approchée de S à 10^{-4} près.

Exercice 13. (Somme de la série harmonique alternée)

On pose, pour tout entier $n \geq 1$,

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}, \quad \text{et} \quad I_n = \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{(1+t)^{n+1}} \mathrm{d}t.$$

(1) En intégrant par parties, montrer que pour tout entier $n \geq 1$,

$$I_{n+1} = \frac{1}{n+1} - I_n.$$

(2) Calculer I_0 et en déduire I_1.
(3) En déduire que, pour tout entier $n \geq 1$, $T_n = \ln(2) + (-1)^{n+1} I_n$.
(4) Montrer que, pour tout $n \geq 1$,

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

(5) Conclure.

Exercice 14. On considère la fonction f définie sur $[0;1]$ par $f(x) = 2xe^x$.

(1) Montrer que f réalise une bijection de $[0;1]$ sur un ensemble que l'on déterminera. On note f^{-1} sa bijection réciproque. Donner les tableaux de variations de f et de f^{-1}.
(2) Vérifier qu'il existe un unique nombre $\alpha \in [0;1]$ tel que $\alpha e^\alpha = 1$. Montrer que $\alpha \neq 0$.
(3) Montrer, par récurrence, que la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 &= \alpha \\ u_{n+1} &= f^{-1}(u_n), \qquad n \geq 0. \end{cases}$$

est bien définie (*i.e.* que u_n existe pour tout entier n) et que $u_n \in]0;1]$.
(4) Montrer que, pour tout $x \in [0;1]$, $f(x) - x \geq 0$ et que l'égalité ne se produit que pour $x = 0$.
(5) En déduire la monotonie de la suite (u_n), puis qu'elle converge. On précisera sa limite.
(6) On s'intéresse alors à la série de terme général u_n dont on note (S_n) la suite des sommes partielles.
 (a) Montrer que, pour tout entier n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2} u_n e^{-u_{n+1}}$.
 (b) En déduire, par récurrence, que pour tout entier n,

$$u_n = \frac{e^{-S_n}}{2^n}.$$

 (c) À l'aide du critère de comparaison, montrer que la série $\sum u_n$ converge. On note L sa somme. Montrer que $\alpha \leq L \leq 2$.
 (d) Montrer finalement que

$$u_n \sim \frac{e^{-L}}{2^n}, \qquad n \to +\infty.$$

Exercice 15. (**Extrait de **DS n°2**, Automne 2019)

Partie I - Étude d'une suite récurrente

On considère une suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 > 0$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \frac{u_n^2}{n+1}.$$

On introduit également la suite (v_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par

$$v_n = \frac{\ln(u_n)}{2^n}.$$

(1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. En déduire que la suite (v_n) est bien définie.

(2) Trouver un réel $q \in]0;1[$ tel que
$$\frac{\ln(n)}{2^n} = o(q^n), \qquad n \to +\infty.$$
En déduire que la série $\sum_{k\geq 1} \frac{\ln(k)}{2^k}$ converge. Dans toute la suite, on note
$$\sigma = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k}.$$

(3) (a) Pour tout entier $k \geq 1$, exprimer $v_k - v_{k-1}$ en fonction de k.
(b) Déterminer alors la nature de la série $\sum_{k\geq 1}(v_k - v_{k-1})$.
(c) En déduire la convergence de la suite (v_n) et exprimer sa limite ℓ en fonction de u_0 et σ.

(4) On suppose dans cette question que $u_0 \neq e^{-\sigma}$.
(a) En distinguant les cas $u_0 < e^{-\sigma}$ et $u_0 > e^{-\sigma}$, déterminer le signe de ℓ.
(b) En déduire la limite de la suite $(\ln(u_n))$ puis le comportement en $+\infty$ de u_n.

(5) On suppose dans cette question que $u_0 = e^{-\sigma}$.
(a) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$v_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k}.$$
(b) Montrer alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\ln(u_n) \geq \frac{\ln(n+1)}{2}.$$
(c) Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Partie II - Approximation de σ

(6) (a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln(x) \leq x$.
(b) Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$, avec $m \geq n+1$. Déterminer
$$\lim_{m\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \times \sum_{k=1}^{m-n} k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \quad \text{et} \quad \lim_{m\to+\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n} \times \sum_{k=1}^{m-n} \left(\frac{1}{2}\right)^{k}.$$
(c) En déduire que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} \leq \frac{n+2}{2^n}.$$

(7) Montrer alors que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \left|\sigma - \left(-\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k}\right)\right| \leq \frac{n+2}{2^n}.$$

(8) Écrire alors une fonction Python `approx(eps)` prenant en argument un réel `eps` et renvoyant une approximation de σ à `eps` près.