Math ECG 1. 2022-2023

Mathématiques Appliquées- F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
E1A - Lycée Carnot, Paris 17e.

Chapitre VI. Équations différentielles linéaires

Dans tout le chapitre, I désigne un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

1 Équations différentielles linéaires à coefficients constants

Définition

On appelle **équation différentielle linéaire à coefficients constants** toute équation différentielle de la forme

$$(E) \qquad a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = b$$

où

- $n \in \mathbb{N}^*$
- $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont des constantes, appelées coefficients de l'équation différentielle
- $t \mapsto b(t)$ est une fonction (a priori non constante) définie sur I, appelée **second membre**
- l'inconnue $y : t \mapsto y(t)$ est une fonction définie et (au moins) dérivable n fois sur I et, pour $0 \leq k \leq n$, $y^{(k)}$ désigne la dérivée $k-$ième de y.

Si la fonction b est nulle, on dit que l'équation est **homogène**.
Si $a_n \neq 0$, on dit que l'équation est **d'ordre** n.

☞ En général, on note (E_0) l'équation différentielle homogène associée :

$$(E_0) \qquad a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

Définition

On appelle **équilibre** toute solution constante.

Exemple

(1) $y' = y$ est
- linéaire
- à coefficients constants
- homogène
- d'ordre 1

(2) $y'' - y = 0$ est
- linéaire
- à coefficients constants
- homogène
- d'ordre 2

(3) $y' = 2y + 5$ est
- linéaire
- à coefficients constants
- non homogène
- d'ordre 1

(4) $y' = y^2$ est
- non linéaire
- d'ordre 1

(5) $y' + ty = 1 + t^2$ est
- linéaire
- à coefficients non constants (t n'est pas une constante)
- non homogène
- d'ordre 1

(6) $y''' + y'' + y' + y = e^t$ est
- linéaire
- à coefficients constants
- non homogène
- d'ordre 3

Proposition

Principe de superposition.

Soient

(E_1) $$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = b_1$$

et

(E_2) $$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = b_2$$

deux équations différentielles linéaires à coefficients constants différant seulement par leur second membre. Soient y_1 une solution de (E_1) et y_2 une solution de (E_2).
Alors, $y_1 + y_2$ est une solution de l'équation différentielle

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = b_1 + b_2$$

Exemple

La fonction $y_1 : t \mapsto -1$ est solution de l'équation différentielle $y' - y = 1$ et la fonction $y_2 : t \mapsto te^t$ est solution de l'équation différentielle $y' - y = e^t$.
D'après le principe de superposition, la fonction $f = y_1 + y_2 : t \mapsto -1 + te^t$ est solution de l'équation différentielle $y' - y = 1 + e^t$. On peut le vérifier facilement par le calcul.

À retenir!

☞ Le principe de superposition dit en substance que

$$\text{résoudre l'équation différentielle } (E) \iff \begin{cases} \text{résoudre l'équation différentielle homogène } (E_0) \\ \text{et} \\ \text{trouver une solution particulière de } (E) \end{cases}$$

2 Équations différentielles linéaires à coeff. constants d'ordre 1

2.1 Définition(s)

Définition

On appelle **équation différentielle linéaire d'ordre** 1 **à coefficients constants** toute équation différentielle de la forme

$$(E) \qquad y' + ay = b$$

où

- $a \in \mathbb{R}^*$ est une constante non nulle
- b est une fonction continue sur I (a priori non constante)
- l'inconnue y est une fonction définie et dérivable sur I.

Remarque

Si $a = 0$, résoudre l'équation différentielle revient à calculer une primitive de b.

2.2 Le cas homogène

Proposition

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 à coefficients constants $(E_0) : y' + ay = 0$ est

$$S_0 = \left\{ t \mapsto \lambda e^{-at} \ : \ \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Pour le dire autrement, y est une solution de (E_0) si et seulement si il existe une constante $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $y(t) = \lambda e^{-at}$. En particulier, on remarque qu'il existe une infinité de solutions.

Définition

Problème de Cauchy pour une équation différentielle d'ordre 1**.**

Soit $c \in \mathbb{R}$. Résoudre le *problème de Cauchy*

$$\begin{cases} y' + ay = 0 \\ y(0) = c \end{cases},$$

c'est trouver les solutions de l'équation différentielle $y' + ay = 0$ qui vérifient la condition initiale $y(0) = c$.

Proposition

Existence et unicité d'une solution au problème de Cauchy.

Soit $c \in \mathbb{R}$. On considère le problème de Cauchy

$$(P_0) \qquad \begin{cases} y' + ay = 0 \\ y(0) = c \end{cases}.$$

Il existe une unique solution au problème de Cauchy (P_0), qui est la fonction

$$f : t \mapsto ce^{-at}$$

Remarque

L'équation différentielle $y' + ay = 0$ possède une infinité de solutions mais il n'en reste plus qu'une lorsqu'on fixe la condition initiale. Ainsi, si deux solutions de $y' + ay = 0$ vérifient la même condition initiale, alors elles sont identiques.

2.3 Recherche d'une solution particulière : la méthode de variation de la constante (Hors-programme)

Hors Programme mais...

Méthode de de variation de la constante.

Considérons une solution $f : t \mapsto \lambda e^{-at}$ de l'équation différentielle homogène (E_0). Comme son nom l'indique, la méthode consiste à faire varier la constante λ pour trouver une solution particulière de l'équation différentielle avec second membre (E). Plus précisément, on considère finalement la fonction

$$f : t \mapsto \lambda(t)e^{-at} \qquad \text{(la constante } \lambda \text{ n'en est plus une, elle dépend maintenant de } t\text{)}$$

et on suppose que la fonction $t \mapsto \lambda(t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Par dérivation d'un produit, on obtient, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f'(t) = \lambda'(t)e^{-at} - a\lambda(t)e^{-at} = \lambda'(t)e^{-at} - af(t)$$

d'où les équivalences :

$$\begin{aligned}
f \text{ est solution de } (E) &\iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad f'(t) + af(t) = b(t) \\
&\iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad \lambda'(t)e^{-at} - \cancel{af(t)} + \cancel{af(t)} = b(t) \\
&\iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad \lambda'(t) = b(t)e^{at} \\
&\iff \text{la fonction } \lambda \text{ est une primitive de la fonction } t \mapsto b(t)e^{at} \text{ sur } \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Or, par hypothèse, b est continue sur $\mathbb{R}$ donc la fonction $t \mapsto b(t)e^{at}$ est également continue sur $\mathbb{R}$ et donc elle admet une primitive sur $\mathbb{R}$. Notons $t \mapsto k(t)$ une telle primitive. Ainsi, la fonction

$$f : t \mapsto k(t)e^{-at}$$

est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

Remarque

Il faudra refaire le raisonnement précédent à chaque fois que l'on souhaite trouver une solution particulière pour savoir quelle primitive calculer. De plus, il faut se souvenir que la fonction

$$t \mapsto \int_0^t b(x)e^{ax}\mathrm{d}x$$

est l'unique primitive de $t \mapsto b(t)e^{at}$ sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0. On peut donc calculer une primitive en calculant une intégrale (on a alors accès aux techniques usuelles de calcul : IPP et changement de variable).

Remarque

La méthode de la variation de la constante montre qu'il existe toujours une solution de l'équation différentielle (E) : $y' + ay = b$ lorsque la fonction b est continue.

2.4 Résolution complète

Proposition

Soit $(E) : y' + ay = b$ une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants. Soit y_p une solution particulière de (E). L'ensemble des solutions de (E) est

$$S = \{y_p + y_0 \ : \ y_0 \in S_0\} = \left\{t \mapsto y_p(t) + \lambda e^{-at} \ : \ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

Exercice 1. On considère l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants

$$(E) \qquad\qquad y' + 2y = 1 + t.$$

(1) Résoudre l'équation homogène associée à (E).
(2) Déterminer en reprenant les étapes de la *méthode de la variation de la constante* une solution particulière de (E).
(3) Donner toutes les solutions de (E).

2.5 Compléments sur la recherche de solutions particulières

On considère toujours dans ce paragraphe l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants

$$(E) \qquad\qquad y' + ay = b$$

et on rappelle que $a \neq 0$.

Proposition

Si b est une constante, alors l'équation différentielle (E) admet pour solution particulière la fonction constante

$$t \mapsto \frac{b}{a}$$

Cette solution particulière est l'unique équilibre de l'équation différentielle (E).

Proposition

Si b est une fonction polynomiale, alors il existe une solution particulière de (E) qui soit également une fonction polynomiale, de même degré que b.

Proposition

On suppose que $b : t \mapsto Q(t)e^{\gamma t}$ où $\gamma \in \mathbb{R}$ et Q est une fonction polynomiale. Alors il existe une solution particulière de (E) qui soit de la forme

- $t \mapsto R(t)e^{\gamma t}$ si $\gamma \neq -a$
- $t \mapsto tR(t)e^{\gamma t}$ si $\gamma = -a$

où R est une fonction polynomiale de même degré que Q.

3 Equations différentielles linéaires à coeff. constants d'ordre 2

3.1 Définition

Définition

On appelle **équation différentielle linéaire d'ordre** 2 **à coefficients constants** toute équation différentielle de la forme

$$(E) \qquad y'' + ay' + by = c$$

où
- $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}^*$ sont deux constantes
- c est une fonction continue sur I (a priori non constante)
- l'inconnue $y : t \mapsto y(t)$ est une fonction définie et (au moins) deux fois dérivable sur I

Remarque

Si $b = 0$, on se ramène à une équation différentielle d'ordre 1 en posant $z = y'$.

3.2 Le cas homogène

Notons

$$(E_0) \qquad y'' + ay' + by = 0$$

l'équation différentielle homogène associée. La résolution d'une telle équation est analogue à la résolution des suites récurrentes linéaires d'ordre 2. On introduit le **polynôme caractéristique** :

$$P(X) = X^2 + aX + b$$

Proposition

Notons Δ le discriminant du polynôme $P(X) = X^2 + aX + b$. Il y a trois cas possibles :

- Si $\Delta > 0$, alors le polynôme $P(X)$ admet deux racines distinctes notées r_1 et r_2. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène (E_0) est alors
$$\begin{aligned} S_0 &= \left\{t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t} \;:\; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\} \\ &= \mathrm{Vect}\left(t \mapsto e^{r_1 t}, t \mapsto e^{r_2 t}\right) \end{aligned}$$
- Si $\Delta = 0$, alors le polynôme $P(X)$ admet une unique racine notée r_0. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène (E_0) est alors
$$\begin{aligned} S_0 &= \left\{t \mapsto (\lambda t + \mu) e^{r_0 t} \;:\; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\} \\ &= \mathrm{Vect}\left(t \mapsto t e^{r_0 t}, t \mapsto e^{r_0 t}\right) \end{aligned}$$
- Si $\Delta < 0$, alors le polynôme $P(X)$ n'admet pas de racines réelles et on ne peut rien dire (cas hors-programme).

Définition

Problème de Cauchy pour une équation différentielle d'ordre 2.

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Résoudre le *problème de Cauchy*

$$\begin{cases} y'' + ay' + by = 0 \\ y(0) = \alpha \\ y'(0) = \beta \end{cases},$$

c'est trouver les solutions de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$ qui vérifient les deux conditions initiales $y(0) = \alpha$ et $y'(0) = \beta$.

Remarque

Pour une équation différentielle d'ordre n, il faut fixer n conditions initiales sur y et ses dérivées successives pour obtenir un problème de Cauchy bien posé. Toutes les conditions initiales doivent être considérées *au même instant*. On retiendra le tableau suivant pour savoir quelles sont les conditions initiales à fixer pour un problème de Cauchy.

Ordre	Condition initiale
1	$y(0)$
2	$y(0)$ et $y'(0)$
3	$y(0)$, $y'(0)$ et $y''(0)$
...	...

Proposition

Existence et unicité d'une solution au problème de Cauchy.

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. On considère le problème de Cauchy

$$(P_0) \qquad \begin{cases} y'' + ay' + by = 0 \\ y(0) = \alpha \\ y'(0) = \beta \end{cases}$$

Il existe une unique solution au problème de Cauchy (P_0). Plus précisément,

- Si $\Delta > 0$, alors le polynôme $P(X)$ admet deux racines distinctes notées r_1 et r_2. L'unique solution du problème de Cauchy (P_0) est la fonction

$$t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$$

où (λ, μ) est le couple solution du système linéaire

$$\begin{cases} y(0) = \alpha \\ y'(0) = \beta \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda + \mu = \alpha \\ r_1 \lambda + r_2 \mu = \beta \end{cases}$$

- Si $\Delta = 0$, alors le polynôme $P(X)$ admet une unique racine notée r_0. L'unique solution du problème de Cauchy (P_0) est la fonction

$$t \mapsto (\lambda t + \mu) e^{r_0 t}$$

où (λ, μ) est le couple solution du système linéaire

$$\begin{cases} y(0) = \alpha \\ y'(0) = \beta \end{cases} \iff \begin{cases} \mu = \alpha \\ \lambda + r_0 \mu = \beta \end{cases}$$

3.3 Recherche d'une solution particulière : se laisser guider par l'énoncé

☞ Il n'y a pas de résultat à connaître : l'énoncé doit donner une indication.

Exercice 2. On considère l'équation différentielle $y'' + y' - 2y = (10 + 8t)e^{2t}$. Déterminer une solution particulière de la forme $t \mapsto cte^{2t}$ où $c \in \mathbb{R}$.

3.4 Résolution complète

Proposition

Soit (E) : $y'' + ay' + by = c$ une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants. Soit y_p une solution particulière de (E). L'ensemble des solutions de (E) est

$$S = \{y_p + y_0 \ : \ y_0 \in S_0\}$$

Proposition

Existence et unicité d'une solution au problème de Cauchy.

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. On considère le problème de Cauchy

$$(P) \qquad \begin{cases} y'' + ay' + by = c \\ y(0) = \alpha \\ y'(0) = \beta \end{cases}$$

Il existe une unique solution au problème de Cauchy (P).

Exercice 3. On reprend l'équation différentielle $y''+y'-2y = (10+8t)e^{2t}$ dont on a trouvé une solution particulière dans l'exercice précédent. Résoudre complètement cette équation différentielle.

3.5 Compléments sur la recherche de solutions particulières

On considère toujours dans ce paragraphe l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants

$$(E) : \qquad y'' + ay' + by = c$$

et on rappelle que $b \neq 0$.

Proposition

Si c est une constante, alors l'équation différentielle (E) admet pour solution particulière la fonction constante

$$t \mapsto \frac{c}{b}$$

Cette solution particulière est l'unique équilibre de l'équation différentielle (E).

Proposition

Si c est une fonction polynomiale, alors il existe une solution particulière de (E) qui soit également une fonction polynomiale, de même degré que c.

Proposition

On suppose que $c : t \mapsto Q(t)e^{\gamma t}$ où $\gamma \in \mathbb{R}$ et Q est une fonction polynomiale. On rappelle qu'on note $P(X)$ le polynôme caractéristique associé à l'équation différentielle (E). Alors il existe une solution particulière de (E) qui soit de la forme

- $t \mapsto R(t)e^{\gamma t}$ si γ n'est pas racine de $P(X)$
- $t \mapsto tR(t)e^{\gamma t}$ si γ est une racine simple de $P(X)$
- $t \mapsto t^2R(t)e^{\gamma t}$ si γ est une racine double de $P(X)$

où R est une fonction polynomiale de même degré que Q.

Sélection d'exercices

Exercice 4. Résoudre les équations différentielles linéaires homogènes d'ordre 1 à coefficients constants suivantes.

(1) $y' = 2y$ (2) $y' - 3y = 0$ (3) $y' + 4y = 0$

Exercice 5. Résoudre les problèmes de Cauchy suivants.

(1) $\begin{cases} y' + 10y = 0 \\ y(0) = 10 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} y' - 7y = 0 \\ y(0) = -3 \end{cases}$ (3) $\begin{cases} y' = 8y \\ y(0) = -1 \end{cases}$

Exercice 6. Déterminer l'ensemble des solutions des équations différentielles suivantes :

(1) $y' + 2y = 3$ (2) $y' - y = t^2 + 1$ (3) $y' + y = te^t$

Exercice 7. Déterminer les solutions de l'équation différentielle $y' - 3y = t\ln(t)e^{3t}$.

Exercice 8. Déterminer l'ensemble des solutions des équations différentielles suivantes :

(1) $y'' - 3y' + 2y = 0$ (2) $y'' - 4y' + 4y = 0$ (3) $y'' - 2y = 0$

Exercice 9. Résoudre les problèmes de Cauchy suivants.

(1) $\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} y'' - 4y' + 4y = 0 \\ y(0) = -3 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$ (3) $\begin{cases} y'' - 2y = 0 \\ y(0) = -1 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$

Exercice 10. Déterminer l'ensemble des solutions des équations différentielles suivantes :

(1) $y'' - 3y' + 2y = 1 + t$
(2) $y'' - 3y' + 2y = te^t$
(3) $y'' - 4y' + 4y = te^{2t}$
(4) $y'' - 4y' + 4y = (-1 + t)e^{-t}$
(5) $y'' - 2y = e^t$
(6) $y'' - 2y = 1 - 2t + 3t^2$

Exercice 11. Déterminer les solutions de l'équation différentielle $y'' - y' = 0$ de deux manières différentes:

(1) En appliquant le théorème du cours sur les équations différentielles linéaires d'ordre 2.
(2) En faisant un changement de fonction inconnue pour se ramener à une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

Exercice 12. (**Une équation différentielle non linéaire**)
Soit $(a,b) \in]0,+\infty[^2$. On considère l'équation différentielle logistique (non linéaire)

$$\text{(E)} \qquad y' = ay - aby^2$$

(1) Déterminer les équilibres de l'équation logistique.
(2) Soit f une solution de (E) sur $[0,+\infty[$ qui ne s'annule pas (on admet qu'une telle solution existe).
  (a) On pose $z = \dfrac{1}{f}$. Montrer que z satisfait une équation différentielle linéaire puis montrer que, pour tout $t \geq 0$, $z(t) = b + (z(0) - b)e^{-at}$.
  (b) En déduire que, pour tout $t \geq 0$, $f(t) = \dfrac{f(0)}{bf(0) + (1 - bf(0))e^{-at}}$.
(3) Calculer $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$. Que remarque-t-on ?

Exercice 13. (Extrait de **EML 2023**)

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ représenté dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$ par la matrice

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(1) On note $v_1 = (2,-1)$ et $v_2 = (-1,0)$. Montrer que (v_1, v_2) forme une base de $\mathbb{R}^2$.
(2) Déterminer la matrice T de f dans cette base.
(3) On note Q la matrice dont les colonnes sont les coordonnées de v_1 et v_2 dans la base canonique. Justifier que Q est inversible. Déterminer Q^{-1} et vérifier que $B = QTQ^{-1}$.

On considère le *système différentiel* (Σ) suivant

$$(\Sigma) : \begin{cases} x' &= -x - 4y \\ y' &= x + 3y \end{cases}$$

où x et y désignent des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ (à valeurs réelles).
Afin de résoudre (Σ) (c'est à dire de déterminer x et y), on pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. On a alors que $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

(4) Vérifier que (x,y) est solution de (Σ) si et seulement si $X' = BX$.
(5) On introduit $Z = Q^{-1}X$. On admet que, par linéarité de la dérivation, $Z' = Q^{-1}X'$.
Vérifier que
$$X' = BX \iff Z' = TZ.$$
(6) On note $Z = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$. Expliciter, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\alpha(t)$ et $\beta(t)$.
(7) Conclure.