Mathématiques Appliquées- F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
E1A - Lycée Carnot, Paris 17e.

Chapitre VII. Graphes

Un graphe est une construction visant à expliciter / formaliser / modéliser des relations (les *arêtes*) entre des données (des *sommets*). S'interroger sur des relations entre données est une démarche extrêmement fréquente que l'on rencontre dans des domaines variés :

- une carte routière décrit les axes routiers (arêtes) reliant des villes (sommets).
- un arbre généalogique décrit la relation de descendance ou d'ascendance (arêtes) entre différents membres d'une même famille.
- en biologie, l'*interactome* humain est un graphe dont les sommets sont les protéines et dont les arêtes décrivent les interactions entre les protéines.
- un réseau social peut être décrit par les liens d'amitié virtuelle (arêtes) reliant des utilisateurs (sommets).
- sur un sujet donné (par exemple, le *climato-scepticisme*[1]), on peut construire le graphe dont les sommets sont des usagers de Twitter. Les arêtes relient deux usagers dès que l'un a relayé l'autre. On s'intéresse alors à la dynamique des interactions. Pour la percevoir visuellement, les longueurs des arêtes seront fonction des interactions : plus un groupe d'usagers relaie des informations des autres usagers du groupe, plus leurs sommets se rapprochent. Cela permet d'observer des communautés, leurs tailles, l'arrivée de nouveaux membres ainsi que les membres les plus actifs. On peut remonter ainsi aux sources principales de la diffusion d'informations climato-sceptiques.

Ce cours présente quelques éléments d'introduction à la théorie des graphes et permettra notamment d'appliquer quelques techniques de calcul de puissances de matrices.

On a choisi de ne présenter que la notion de graphe non pondéré. Celle-ci sera introduite en deuxième année en même temps que les graphes probabilistes.

[1] Une vidéo ici (à partir de 1:10:00)

1 Notion de graphe non orienté

1.1 Définitions générales

Définition

Soit S un ensemble fini.
Soit $\mathcal{E}_S$ l'ensemble des parties à deux éléments de S. Autrement dit :

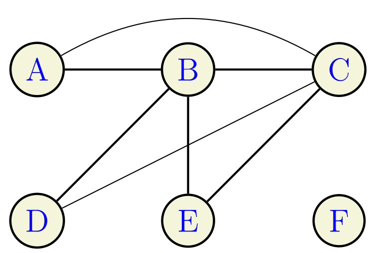
$$\mathcal{E}_S = \{ \{s,t\} \mid (s,t) \in S \times S \text{ et } s \neq t \}$$

Un graphe $\mathcal{G}$ est la donnée d'un couple $\mathcal{G} = (S, \mathcal{A})$ où :

- S est appelé ensemble des **sommets** du graphe $\mathcal{G}$,
- $\mathcal{A} \subset \mathcal{E}_S$ est appelé ensemble des **arêtes** du graphe $\mathcal{G}$.
- On appelle **ordre** du graphe $\mathcal{G}$ le nombre de sommets de $\mathcal{G}$.
Autrement dit, l'ordre de $\mathcal{G}$ est le cardinal de l'ensemble S.
- Si $\{A,B\} \in \mathcal{A}$ on dit que l'arête $\{A,B\}$ relie les sommets A et B ou encore que l'arête $\{A,B\}$ est **incidente** aux sommets A et B. L'arête $\{A,B\} \in \mathcal{A}$ peut être notée $A - B$.
- On appelle **degré** d'un sommet s et on note $d(s)$ le nombre d'arêtes incidentes à ce sommet.
- On dit que deux sommets sont **adjacents** s'ils sont reliés par une arête.
- Enfin, un dit qu'un sommet est **isolé** s'il n'est relié à aucun autre sommet du graphe ou de manière équivalente si son degré est nul.

Exemple

On considère le graphe suivant, donné par sa représentation graphique.



Graphe 1

- Le graphe $\mathcal{G} = (S, \mathcal{A})$ est ici défini par :

  × l'ensemble des sommets $S = \{A, B, C, D, E, F\}$,
  × l'ensemble des arêtes $\mathcal{A} = \big\{ \{A,B\}, \{A,C\}, \{B,C\}, \{B,D\}, \{B,E\}, \{C,D\}, \{C,E\} \big\}$.

- Le graphe $\mathcal{G}$ est d'ordre $\text{Card}(S) = 6$.

- Par ailleurs :

  × le sommet A est de degré 1.
  × le sommet B est de degré 4.
  × le sommet F est de degré 0; c'est un sommet isolé.

1.2 Notion de graphe complet

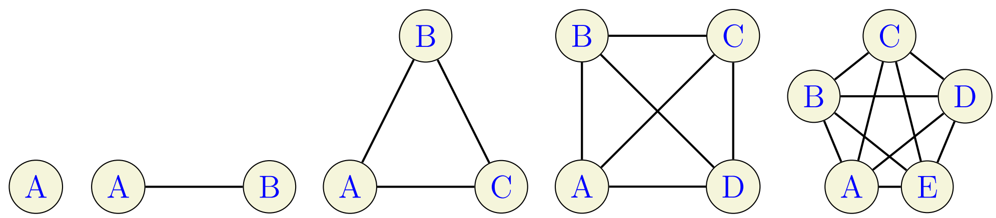
Définition

Soit $\mathcal{G} = (S, \mathcal{A})$ un graphe.

On dit que le graphe $\mathcal{G}$ est **complet** lorsque tous ses sommets sont deux à deux adjacents. Autrement dit, $\mathcal{G}$ est **complet** lorsque tout couple de sommets disjoints est relié par une arête.

Exemple

On peut donner une représentation graphique des graphes complets à n sommets pour différentes valeurs de n.



n=1 n=2 n=3 n=4 n=5

Exercice 1. Donner une représentation graphique du graphe complet à 6 sommets puis une représentation graphique du graphe complet à 7 sommets.

Théorème

Nombre d'arêtes d'un graphe complet.

Soit $\mathcal{G} = (S, \mathcal{A})$ un graphe. On note $n = \text{Card}(S)$ l'ordre de $\mathcal{G}$.

Si $\mathcal{G}$ est un graphe complet, alors $\mathcal{G}$ possède exactement $\dfrac{n\,(n-1)}{2}$ arêtes.

Preuve.
On peut faire deux démonstrations différentes.

- En revenant à la définition
  Si le graphe $\mathcal{G}$ est complet, alors $\mathcal{A} = \mathcal{E}_S$ (tout couple de sommets définit une arête). On en déduit donc directement :
  $$\text{Card}(\mathcal{A}) \quad = \quad \text{Card}(\mathcal{E}_S) \quad = \quad \binom{n}{2} \quad = \quad \frac{n\,(n-1)}{2}.$$
- Par construction
  Démontrons par récurrence sur n que tout graphe complet à n sommets possède exactement $n(n-1)/2$ arêtes.

  × <u>initialisation.</u> D'une part, un graphe complet à 1 sommet ne possède pas d'arête. D'autre part : $1 \times (1-1)/2 = 0$. La propriété est vraie au rang 1.

  × <u>hérédité.</u> Supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, on sache que tout graphe complet à n sommets possède $n(n-1)/2$ arêtes.
  Notons $\mathcal{G} = (S, \mathcal{A})$ un graphe complet à $n+1$ sommets.

Soit $A \in S$. Considérons alors le graphe $\mathcal{G}' = (S', \mathcal{A}')$ défini par $S' = S \setminus \{A\}$ et $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \setminus \big\{ \{A, B\} \mid B \in S \text{ et } B \neq A \big\}$. Autrement dit, $\mathcal{A}'$ est l'ensemble obtenu à partir de $\mathcal{A}$ en supprimant toutes les arêtes incidentes à A.

Alors $\mathcal{G}'$ est un graphe complet à n sommets.

On en déduit, par hypothèse de récurrence : $\text{Card}(\mathcal{A}') = \dfrac{n\,(n-1)}{2}$.

On a alors :

$$\begin{aligned}
\text{Card}(\mathcal{A}) &= \text{Card}\Big(\mathcal{A}' \cup \big\{ \{A, B\} \mid B \in S \text{ et } B \neq A \big\}\Big) \\
&= \text{Card}\big(\mathcal{A}'\big) + \text{Card}\Big(\big\{ \{A, B\} \mid B \in S \text{ et } B \neq A \big\}\Big) \quad \text{car les ensembles sont disjoints} \\
&= \frac{n\,(n-1)}{2} + n \quad \text{(tout sommet est relié à tous les autres sommets)} \\
&= \frac{n}{2}\,\big((n-1)+2\big) = \frac{n\,(n+1)}{2},
\end{aligned}$$

ce qui termine la récurrence.

□

Corollaire

Tout graphe $\mathcal{G}$ à n sommets possède au plus $\dfrac{n(n-1)}{2}$ arêtes.

1.3 Matrice d'adjacence d'un graphe

Définition

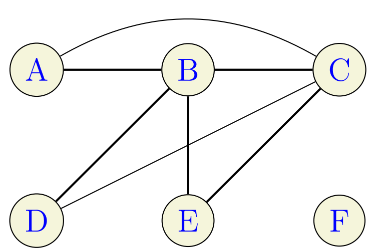
Soit $\mathcal{G} = (S, \mathcal{A})$ un graphe. On note $n = \text{Card}(S)$ l'ordre de $\mathcal{G}$.
Il existe donc une bijection φ entre $[\![1, n]\!]$ et S.

On appelle **matrice d'adjacence** du graphe $\mathcal{G}$ la matrice carrée $M \in \mathcal{M}_n$ définie par :

$$M_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{si les sommets } \varphi(i) \text{ et } \varphi(j) \text{ sont adjacents} \\ 0, & \text{si les sommets } \varphi(i) \text{ et } \varphi(j) \text{ ne sont pas adjacents} \end{cases}$$

Exemple

La matrice d'adjacence du *Graphe 1* ci-avant est donnée par :



Graphe 1

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccc} A & B & C & D & E & F \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Exercice 2. Écrire la matrice d'adjacence du graphe complet à 4 sommets.

Remarque

(1) Les matrices d'adjacence de graphes **non orientés** sont symétriques. C'est logique : si $A - B \in \mathcal{A}$ on a aussi $B - A \in \mathcal{A}$.

(2) les diagonales des matrices d'adjacence exposées ci-dessus sont constituées uniquement de 0. Cela témoigne du fait que les graphes d'origine ne contiennent pas de **boucle** (par définition, une boucle est une arête reliant un sommet à lui-même). Il est à noter que les boucles sont tout à fait autorisées par la notion de graphes.

(3) Si le graphe est complets, tous ses coefficients en dehors de la diagonale sont des 1. Il y a n^2 coefficients dans la matrice et n sur la diagonale. Il y a donc

$$n^2 - n = n\,(n-1)$$

coefficients de égaux à 1 dans la matrice.
Or, il y a exactement deux fois plus de coefficients 1 que d'arêtes (l'arête $\{A, B\}$ apparaît dans la matrice pour coder le lien entre A et B mais aussi pour le lien entre B et A). Il y a donc en tout

$$\frac{n\,(n-1)}{2}$$

arêtes dans un tel graphe.

À retenir!

La matrice d'adjacence caractérise le graphe.
Notamment, **en Python**, un graphe peut être représenté par sa matrice d'adjacence.

1.4 Liste d'adjacence d'un graphe

Définition

Soit $\mathcal{G} = (S, \mathcal{A})$ un graphe. On note $n = \mathrm{Card}(S)$ l'ordre de $\mathcal{G}$.
Il existe donc une bijection φ entre $[\![1, n]\!]$ et S.

On appelle **liste d'adjacence** du graphe $\mathcal{G}$ la liste $L = [L_1, ..., L_n]$ dont chaque composante L_i est la liste des sommets adjacents au sommet $\varphi(i)$.

Exemple

Toujours dans l'exemple de notre *Graphe 1*, sa liste d'adjacence est

$$L = [\,[B, C], [A, D, C, E], [A, B, D, E], [B, C], [\quad]\,]$$

À retenir!

La liste d'adjacence caractérise aussi complètement le graphe.
En Python, le graphe peut être représenté par sa liste d'adjacence, comme par sa matrice d'adjacence.
Il faut être capable de passer de l'un à l'autre.

Exercice 3. Un programme Python génère des graphes. Après exécution de ce programme, l'affichage correspondant est reproduit ci-dessous.

Affichage Python

```
>>>
[['b', 'e', 'f'], ['a', 'c', 'f'], ['b'], [], ['a'], ['a', 'b']]
```

(1) Donner une représentation graphique du graphe correspondant.
(2) Ce graphe contient-il des sommets isolés? Si oui, combien ?
(3) Expliciter la matrice d'adjacence de ce graphe.

Exercice 4. Écrire une fonction Python d'en-tête `def matrix_to_list(M):` qui prend en argument une matrice carrée M étant la matrice d'adjacence d'un graphe $\mathcal{G}$ et qui renvoie la liste d'adjacence du même graphe.

Exercice 5. Écrire une fonction Python d'en-tête `def nb_sommets_isoles(L):` qui prend en argument une liste L d'adjacence d'un graphe $\mathcal{G}$ et qui renvoie le nombre de sommets isolés du graphe.

2 Accessibilité dans un graphe non orienté

2.1 Notion de chaîne

Définition

Soit $\mathcal{G} = (S, \mathcal{A})$ un graphe. Soit $m \in \mathbb{N}$.

- Une **chaîne** est une suite finie non vide de sommets telle que chaque paire de sommets consécutifs de la suite soit une arête du graphe.
  Le premier sommet d'une chaîne est appelé la **source** de cette chaîne.
  Le dernier sommet d'une chaîne est appelé le **but** de cette chaîne.

- La **longueur** d'une chaîne est le nombre d'arêtes qui constituent cette chaîne.
  Ainsi, une chaîne de longueur m est la donnée d'une suite de sommets $(s_i)_{i \in [\![0,m]\!]}$ telle que :
  $$\forall i \in [\![0, m]\!], \; s_i - s_{i+1}$$
  Cette chaîne sera notée $(s_0, \ldots, s_m)$ ou $s_0 - \ldots - s_m$.
  On note au passage qu'une chaîne de longueur m possède $m+1$ sommets.
  Si i et j sont deux entiers de $[\![0, m]\!]$ tels que $i \leq j$, alors $(s_i, \ldots, s_j)$ est une **sous-chaîne** de la chaîne $(s_0, \ldots, s_m)$. Enfin, s'il existe une chaîne de longueur m entre deux sommets $s \in S$ et $t \in S$, on pourra noter : $s \overset{m}{\rightsquigarrow} t$.

- Une chaîne de longueur 0 est la donnée d'un sommet.

- S'il existe une chaîne d'un sommet $s \in S$ à un sommet $t \in S$, on dit que t est **accessible** depuis s (et ainsi, t est aussi accessible depuis s).

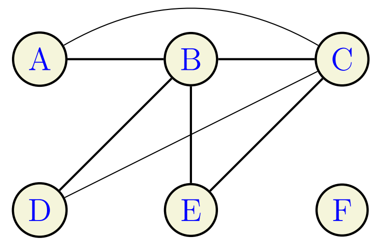
- Une chaîne est :

  × **élémentaire** si aucun sommet n'y figure plus d'une fois, à l'exception de la source et du but qui peuvent coïncider.
  × **simple** si aucune arête n'y figure plus d'une fois.

Exemple

Reprenons l'exemple du *Graphe 1*.

- A est une chaîne élémentaire de longueur 0.
- $A - B - E$ est une chaîne élémentaire de longueur 2.
- $A - B - E - B - D - B - A - C - E$ est une chaîne non élémentaire de longueur 8.
- $A - B - E - C - A$ est une chaîne élémentaire de longueur 4.
- Le sommet F n'est accessible depuis aucun autre sommet.



2.2 Lien avec la matrice d'adjacence

Théorème

Soit $\mathcal{G} = (S, \mathcal{A})$ un graphe. On note $n = \text{Card}(S)$ l'ordre de $\mathcal{G}$.
Il existe donc une bijection φ entre $[\![1, n]\!]$ et S.
On note M la matrice d'adjacence de $\mathcal{G}$.

Pour tout entier naturel $p \in \mathbb{N}$ et pour tout couple $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, n]\!]$, on note :

× $c_{i,j}(p)$ le nombre de chaînes de longueur p reliant les sommets $\varphi(i)$ et $\varphi(j)$.
× $m_{i,j}(p)$ le coefficient située à la $i-$ème ligne et $j-$ème colonne de M^p.

Alors, pour tout $p \in \mathbb{N}$ et pour tout couple $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, n]\!]$:

$$c_{i,j}(p) = m_{i,j}(p)$$

(le coefficient (i, j) de la matrice M^p contient le nombre de chaînes de longueur p reliant $\varphi(i)$ à $\varphi(j)$)

Exemple

Reprenons notre fil rouge du *Graphe 1* dont la matrice d'adjacence est la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{ce qui donne} \qquad M^3 = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 7 & 2 & 2 & 0 \\ 7 & 6 & 7 & 7 & 7 & 0 \\ 7 & 7 & 6 & 7 & 7 & 0 \\ 2 & 7 & 7 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 7 & 7 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On peut donc en déduire qu'il y a 2 chemins de longueurs 3 entre les sommets D et E:
$D - C - B - E$ et $D - B - C - E$.

2.3 Notion de graphe connexe

Définition

Soit $\mathcal{G} = (S, \mathcal{A})$ un graphe.

Le graphe $\mathcal{G}$ est dit **connexe** s'il existe une chaîne entre tout couple de sommets.
Autrement dit, un graphe $\mathcal{G}$ est connexe si tout sommet est accessible depuis tous les autres sommets.

☞ Le *Graphe 1* n'est clairement pas connexe; il contient un sommet isolé.
En revanche, le sous-graphe ne contenant pas le sommet F est quant à lui bien connexe.

3 Extension des notions au cas de graphe orienté

La notion de **graphe orienté** diffère de celle de graphe non orienté par le fait que les arêtes d'un graphe orienté, appelées des arcs, on un sens de parcours : l'existence d'un arc $A \to B$ signifie que l'on peut passer du sommet A au sommet B mais pas forcément du sommet B au sommet A.

La notion de graphe orienté donne lieu à un vocabulaire spécifique.

Définition

Soit S un ensemble fini.

- Un graphe orienté $\mathcal{G}$ est la donnée d'un couple $\mathcal{G} = (S, \mathcal{A})$ où :

  × S est appelé ensemble des **sommets** du graphe $\mathcal{G}$,
  × $\mathcal{A} \subset S \times S$ est appelé ensemble des **arcs** du graphe $\mathcal{G}$.

- On appelle **ordre** du graphe $\mathcal{G}$ le nombre de sommets de $\mathcal{G}$.
  Autrement dit, l'ordre de $\mathcal{G}$ est le cardinal de l'ensemble S.

- Si $(A, B) \in \mathcal{A}$ on dit que l'arc (A, B) relie les sommets A et B ou encore que l'arc (A, B) est **incident** aux sommets A et B. L'arc $(A, B) \in \mathcal{A}$ peut être notée $A \to B$.
  Un tel arc est dit **sortant** pour le sommet A et **entrant** pour le sommet B.

- On appelle **degré** d'un sommet le nombre d'arcs incidents à ce sommet.
  On peut distinguer le **degré entrant** d'un sommet s, noté $d^-(s)$ qui est le nombre d'arcs entrant vers s et le **degré sortant** de s, noté $d^+(s)$ qui est le nombre d'arcs sortant de s.

- On dit que deux sommets sont **adjacents** s'ils sont reliés par un arc.

- La notion d'arêtes étant remplacées par la notion d'arcs, la notion de chaîne est quant à elle nommée **chemin** et on parle de chemin de longueur k et on écrit encore $s \overset{k}{\rightsquigarrow} m$.

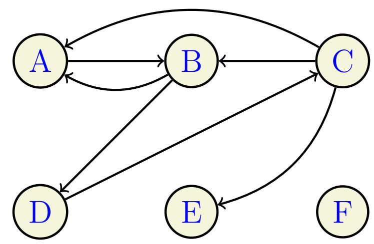
- Un graphe est dit **connexe** s'il existe un chemin entre tout couple de sommets.

À retenir!

Il est capital de bien faire attention au type de graphe avec lequel on travaille. La terminologie peut sembler proche, il n'en demeure pas moins indispensable de manipuler les résultats avec discernement.

Exemple

Modifions un peu notre graphe préféré pour obtenir un graphe orienté que l'on nomme *Graphe 2*.



- Le graphe est d'ordre 6.
- Concernant le sommet A:
  - × Il est de degré sortant $d^+(A) = 1$
  - × Il est de degré entrant $d^-(A) = 2$
  - × Il est de degré
    $d(A) = d^+(A) + d^-(A) = 3$
- Concernant la connexité du graphe
  - × Le graphe n'est pas connexe; il admet un sommet isolé.
  - × Le sous-graphe obtenu en enlevant le sommet F n'est pas connexe non plus; il n'existe pas de chemin entre les sommets E et C (ou plus généralement entre E et n'importe quel autre sommet)
  - × Le sous-graphe obteny en enlevant les sommets E et F est quant à lui connexe.

On peut définir également la notion de matrice d'adjacence et de liste d'adjacence d'un graphe orienté.

Définition

Soit $\mathcal{G} = (S, \mathcal{A})$ un graphe orienté. On note $n = \text{Card}(S)$ l'ordre de $\mathcal{G}$.
Il existe donc une bijection φ entre $[\![1, n]\!]$ et S.

On appelle **matrice d'adjacence** du graphe $\mathcal{G}$ la matrice carrée $M \in \mathcal{M}_n$ définie par :

$$M_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{si il existe un chemin du sommet } \varphi(i) \text{ vers le sommet } \varphi(j) \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

On appelle **liste d'adjacence** du graphe $\mathcal{G}$ la liste $L = [L_1, ..., L_n]$ dont la composante L_i est la liste des sommets $\varphi(k)$ pour lesquels il existe un chemin de $\varphi(i)$ à $\varphi(k)$.

Exemple

Avec notre *Graphe 2* ci-dessus, on a la matrice d'adjacence et la liste d'adjacence suivante

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et $L = [\,[B],\ [A, D],\ [A, E],\ [C],\ [\quad],[\quad]\,]$.

Remarque

- Contrairement à la matrice d'adjacence d'un graphe non orienté, celle d'un graphe orienté n'est **pas symétrique**.

- Lorsque, pour tout $(i;j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\varphi(i) \to \varphi(j) \Rightarrow \varphi(j) \to \varphi(i)$, alors on est finalement dans le cas d'un graphe non orienté (et la matrice d'adjacence est symétrique).

- Notant $M = (m_{i,j})$ la matrice d'adjacence du graphe et $\{\varphi(1), \dots, \varphi(n)\}$ ses sommets, on observe que
$$\sum_{j=1}^{n} m_{i,j} = d^+(\varphi(i)), \qquad \sum_{i=1}^{n} m_{i,j} = d^-(\varphi(j))$$

Exercice 6. Écrire une fonction Python d'en-tête `def test_oriente(M):` qui prend en argument la matrice d'adjacence du graphe et renvoie 1 ou 0 selon que le graphe est orienté ou non.

Le théorème cité ci-avant reliant nombre de chaînes entre deux sommets et matrice d'adjacence s'adapte aux graphes orientés.

Théorème

Soit $\mathcal{G} = (S, \mathcal{A})$ un graphe orienté. On note $n = \text{Card}(S)$ l'ordre de $\mathcal{G}$.
Il existe donc une bijection φ entre $[\![1,n]\!]$ et S.
On note M la matrice d'adjacence de $\mathcal{G}$.

Pour tout entier naturel $p \in \mathbb{N}$ et pour tout couple $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,n]\!]$, on note :

× $c_{i,j}(p)$ le nombre de chemins de longueur p du sommet $\varphi(i)$ vers le sommet $\varphi(j)$.
× $m_{i,j}(p)$ le coefficient située à la $i-$ème ligne et $j-$ème colonne de M^p.

Alors, pour tout $p \in \mathbb{N}$ et pour tout couple $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,n]\!]$:
$$c_{i,j}(p) = m_{i,j}(p)$$

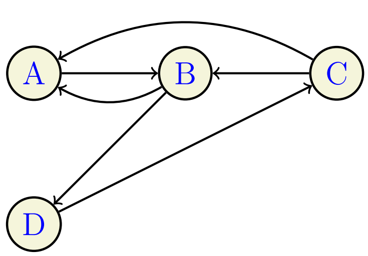
Enfin, il existe un test sur les coefficients de la matrice (ou de ses puissances) permettant de caractériser le caractère connexe d'un graphe orienté.

Théorème

Soit $\mathcal{G} = (S, \mathcal{A})$ un graphe orienté. On note $n = \text{Card}(S)$ l'ordre de $\mathcal{G}$.
On note M la matrice d'adjacence de $\mathcal{G}$.

Alors, $\mathcal{G}$ est connexe si et seulement si la matrice $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} M^i$ a **tous** ses coefficients strictement positifs.

Exercice 7. On considère le graphe orienté $\mathcal{G}$ ci-dessous (obtenu comme sous-graphe de notre *Graphe 2*).



(1) Déterminer la matrice M d'adjacence du graphe.
(2) Calculer M^2 et M^3.
(3) Montrer que $\mathcal{G}$ est connexe.

4 Autres exercices

Exercice 8. (Lemme des poignées de main)

On considère une graphe $\mathcal{G} = (\mathcal{S}, \mathcal{A})$ non orienté.

(1) Montrer qu'additionner le nombre de sommets attachés à chaque arête ou le nombre d'arêtes attachées à chaque sommet donne le même résultat.
(2) En déduire que
$$2\text{Card}(\mathcal{A}) = \sum_{x \in \mathcal{S}} d(x).$$
(3) En déduire que $\mathcal{G}$ possède un nombre pair de sommets ayant un degré impair.

Exercice 9. (Graphes aléatoires)

La fonction Python ci-dessous permet de générer une graphe (non orienté, non pondéré) aléatoire. Plus précisément, prenant en argument une liste de sommet S, elle renvoie une liste d'adjacence générée aléatoirement par les commandes qui suivent.

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

def graphe_aleatoire(S, p):
    n=len(S)
    l=[ [ ] for k in range(n)]
    for i in range(n-1):
        for j in range(i+1, n):
            k=rd.geometric(p)
            if np.floor(k/2)==k/2 :
                l[i].append(S[j])
                l[j].append(S[i])
    return l
```

Soient $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ et S une liste de n sommets. Calculer, en fonction de n et p, la probabilité qu'un graphe aléatoire généré par cette fonction à partir de S ait un nombre d'arêtes maximal.

Une annale : ECRICOME 2023

Partie 1

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ représenté par la matrice A dans la base canonique $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ de $\mathbb{R}^4$.

(1) On considère les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^4$:
$$u_1 = (-1, 1, 0, 1), \quad u_2 = (0, -1, 1, 0), \quad u_3 = (0, 1, 1, 0) \quad u_4 = (1, 0, 0, 1).$$
On note $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$.

(a) Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
(b) Déterminer la matrice représentative de f dans la base $\mathcal{B}$.
(c) En déduire une matrice P de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ inversible et une matrice T de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ triangulaire telles que $A = PTP^{-1}$.
(*Pour une fin de première année, on donne la matrice T : c'est la matrice de passage de la base $\mathcal{C}$ dans la base $\mathcal{B}$; il s'agit de la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}$ exprimées dans $\mathcal{C}$*).

(2) (a) Calculer A^2, A^3, puis vérifier que $A^3 = 4A^2 - 4A$.
(b) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, il existe deux réels a_n et b_n tels que

$$A^n = a_n A^2 + b_n A$$

vérifiant, pour tout entier naturel n non nul, $a_{n+1} = 4a_n + b_n$ et $b_{n+1} = -4a_n$.

(3) (a) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul,

$$a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n.$$

(b) Déterminer, pour tout entier naturel n non nul, une expression de a_n en fonction de n.
(c) En déduire, pour tout entier naturel n non nul, une expression de b_n en fonction de n.

(4) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul,

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 0 & 2^{n-1} \\ (n+1)2^{n-2} & 2^{n-1} & 2^{n-1} & (n-1)2^{n-2} \\ (n+1)2^{n-2} & 2^{n-1} & 2^{n-1} & (n-1)2^{n-2} \\ 2^{n-1} & 0 & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Partie 2

Soient p un entier naturel non nul et G un graphe non pondéré orienté à p sommets. On note s_0, $s_1, \ldots, s_{p-1}$ les sommets de G.

(5) (a) Rappeler la définition de la matrice d'adjacence du graphe G.
(b) Soient n un entier naturel non nul, i un entier de $[\![1, p]\!]$ et j un entier de $[\![1, p]\!]$.
Rappeler sans justification l'interprétation du coefficient situé à la ligne i et à la colonne j dans la matrice M^n, où M est la matrice d'adjacence du graphe G.

(6) Dans cette question uniquement, on suppose que $p = 4$ et que la matrice d'adjacence du graphe G est la matrice $M = A - I$, où A est la matrice étudiée dans la Partie 1.

(a) Représenter les sommets et les arêtes du graphe G sous forme d'un diagramme.
(b) Le graphe G est-il connexe? Justifier votre réponse.
(c) Soit n un entier naturel non nul. Déterminer le nombre de chemins de longueur n menant du sommet s_3 au sommet s_0. (*On distinguera dans l'expression finale les cas n pair et n impair.*)

(7) Dans cette question et les suivantes, on revient au cas général décrit au début de la Partie 2.
Soit s un sommet de G. On dit que le sommet t est un *voisin* de s quand $s \neq t$ et (s, t) est une arête du graphe.
Comme le graphe est orienté, si t est un voisin de s, alors s n'est pas forcément un voisin de t.
On appelle liste d'adjacence du graphe G, une liste de p sous-listes telle que, pour tout entier k de $[\![0, p-1]\!]$, la sous-liste située à la position k contient tous les numéros des sommets voisins de s_k.
Par exemple, la liste d'adjacence du graphe étudié à la question 6 est :

```
L = [[3], [0,2], [0,1], [0]]
```

Écrire une fonction en langage Python, nommée `matrice_vers_liste`, prenant en entrée la matrice d'adjacence `M` d'un graphe G (définie sous forme de listes de listes) et renvoyant la liste d'adjacence de G.

(8) On cherche à écrire une fonction en langage Python permettant d'obtenir la longueur du plus court chemin menant d'un sommet de départ s_i à chaque sommet du graphe G.
On souhaite pour cela appliquer un algorithme faisant intervenir les variables suivantes :

- ✘ Une liste `distances` à p éléments, où l'élément situé à la position k sera égal, à la fin de l'algorithme, à la longueur du plus court chemin menant du sommet de départ s_i au sommet s_k.
- ✘ Une liste `a_explorer` contenant tous les sommets restant à traiter.
- ✘ Une liste `marques` contenant tous les sommets déjà traités.

Nous donnons ci-dessous la description de l'algorithme :

- Initialisation des trois listes décrites ci-dessus :
  - × Initialement, chaque élément de la liste `distances` est égal à p, à l'exception du sommet s_i, auquel on affecte la distance 0.
  - × La liste `marques` ne contient initialement que le numéro du sommet de départ s_i.
  - × La liste `a_explorer` ne contient initialement que le numéro du sommet de départ s_i.

- Tant que la liste `a_explorer` n'est pas vide, on répète les opérations suivantes :
  - × Nommer `s` le premier sommet de la liste `a_explorer`, et le retirer de cette liste.
  - × Pour chaque voisin `v` du sommet `s` : si `v` n'est pas dans la liste `marques`, on l'ajoute à la fin de la liste `a_explorer`, et on lui affecte une distance égale à `distances[s]+1`.

(a) On considère le graphe orienté G étudié à la question 6.
Donner la valeur de la liste `distances` à l'issue de l'exécution de l'algorithme décrit ci-dessus, lorsqu'on l'applique au graphe G en choisissant s_1 comme sommet de départ.

(b) Recopier et compléter la fonction suivante, prenant en entrée la liste d'adjacence `L` du graphe G et le numéro `i0` du sommet de départ s_i, et renvoyant la liste `distances` après exécution de l'algorithme décrit ci-dessus.

```python
def parcours(L, i0):
    p = len(L)
    distances = .....
    distances[i0] = 0
    a_explorer  = .....
    marques = .....
    while ..... :
        s = .....
        .....
        for v in ..... :
            if v not in marques :
                marques.append(v)
                .....
                .....
    return distances
```

(c) Modifier la fonction précédente pour qu'elle renvoie la liste de tous les sommets s pour lesquels il existe un chemin menant du sommet de départ s_i au sommet s.