Math ECG 2. 2022-2023

Mathématiques Approfondies - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
H2B - Lycée Carnot, Paris 17e.

Exercices

Séance du Vendredi 27/01

Exercice 1. Soit (X_n) une suite de v.a telle que $X_n \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1/n^2)$. Montrer que

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} 0.$$

Exercice 2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta > 0$. On dit qu'une variable aléatoire réelle à densité suit une loi de Laplace de paramètre (α, β), notée $\mathcal{L}(\alpha, \beta)$, si elle admet comme densité la fonction f donnée par:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \frac{1}{2\beta} \exp\left(-\frac{|t-\alpha|}{\beta}\right)$$

(1) Vérifier que f est bien une densité de probabilité d'une variable aléatoire réelle.
(2) Déterminer la fonction de répartition, notée Ψ, de la loi $\mathcal{L}(0, 1)$.
(3) On suppose que X suit la loi $\mathcal{L}(0, 1)$.
   (a) Montrer que $\beta X + \alpha$ suit la loi $\mathcal{L}(\alpha, \beta)$.
   (b) En déduire la fonction de répartition de la loi $\mathcal{L}(\alpha, \beta)$.

(4) Espérance et variance.
   (a) On suppose que X suit la loi $\mathcal{L}(0, 1)$.
   Montrer que $E(X)$ et $V(X)$ existent et valent respectivement 0 et 2.
   (b) En déduire l'existence et les valeurs de l'espérance et de la variance d'une variable aléatoire réelle qui suit la loi $\mathcal{L}(\alpha, \beta)$.

(5) Simulation à partir d'une loi exponentielle.
Soit U une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre 1 et V une variable aléatoire qui suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$ et indépendante de U.

   (a) En utilisant le système complet naturellement associé à V, montrer que $X = (2V-1)U$ suit la loi $\mathcal{L}(0, 1)$.
   (b) Compléter la définition Python ci-dessous pour que la fonction ainsi définie réalise la simulation d'une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{L}(\alpha, \beta)$:

```
def Laplace(alpha, beta):
    if ......... <= 1/2:
        V = 1
    else :
         V = 0
   return ................
```

Exercice 3. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilité et telles que

$$\forall i \in \mathbb{N}^*, \qquad P(X=i) = P(Y=i) = \frac{1}{2^i}.$$

(1) Reconnaître les lois de X et Y.
(2) Déterminer la loi de $Z = X+Y$ ainsi que la loi de X conditionnellement à $[Z=k], k \geq 2$.
(3) Calculer $P(X=Y)$ et $P(X>Y)$.
(4) Calculer $P(X \geq 2Y)$ et $P_{[X>Y]}(X \geq 2Y)$.

Exercice 4. Un immeuble de p étages est équipé d'un ascenseur. N personnes montent dans l'ascenseur au rez de chaussée et descendent chacune à un étage au hasard et de façon indépendante.
Soit X le nombre d'arrêts de l'ascenseur.
On note X_i la variable valant 1 si l'ascenseur s'arrête à l'étage i et 0 sinon et on note E_k la variable aléatoire qui prend la valeur de l'étage où descend la $k-$ième personne.

(1) Pour tout $k \in [\![1; N]\!]$, quelle est la loi de E_k?
(2) En utilisant les variables aléatoires E_k, déterminer $P(X_i = 0)$.
(3) Calculer $E(X)$.
(4) Déterminer pour i différent de j : $P(X_i = 0 \cap X_j = 0)$.
En déduire $P(X_i X_j = 0)$.
(5) Déduire de la question précédente $\mathrm{Cov}(X_i, X_j)$ puis calculer alors $V(X)$.

Exercice 5. On considère une suite (X_n) de variables de Bernoulli, $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(p_n)$, un réel $\lambda \in]0;1[$ et on suppose que

$$P_{[X_n=1]}(X_{n+1}=1) = p_n, \qquad P_{[X_n=0]}(X_{n+1}=1) = \lambda p_n.$$

(1) Montrer que
$$p_{n+1} = (1-\lambda)p_n^2 + \lambda p_n.$$
(2) Calculer $\mathrm{Cov}(X_n, X_{n+1})$ en fonction de p_{n+1} et p_n, puis en fonction de p_n et λ.
(3) Les variables X_n et X_{n+1} sont-elles indépendantes?

Exercice 6. Soit $(X_1, ..., X_n)$ un $n-$uplet de v.a. finies.

(1) Rappeler la formule liant $V(X_1 + X_2)$ et $\mathrm{Cov}(X_1, X_2)$.
(2) Montrer, par récurrence sur n, que
$$V(X_1 + X_2 + ... + X_n) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i-1} \mathrm{Cov}(X_i, X_j).$$
(3) Qu'obtient-on sur les variables sont mutuellement indépendantes?

Exercice 7. On met n jetons numérotées au hasard dans n boites numérotées (un seul jeton dans chaque boite).
Soit X_k la variable valant 1 si le k-ième jeton est dans la k-ième boite et 0 sinon.
Soit X le nombre de coïncidences entre les numéros des jetons et des boites.

(1) Déterminer la loi de X_k.
(2) Pour i différent de j, déterminer la loi de $X_i X_j$
(3) Exprimer alors $\mathrm{Cov}(X_i, X_j)$.
(4) Déterminer l'espérance et la variance de X. *On utilisera la formule de l'exercice précédent.*

Exercice 8. Pour tout entier n strictement positif, on se donne un réel p_n strictement positif et n variables aléatoires (X_n) indépendantes et suivant une loi de Bernoulli de paramètre p_n. On suppose que np_n a une limite finie strictement positive et on pose

$$\lim_{n\to+\infty} np_n = \lambda.$$

(1) Quelle est la loi de $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$?

(2) Soit k un entier naturel.

(a) Donner l'expression de $P(S_n = k)$ pour n supérieur ou égal à k.

(b) Que peut-on dire de la limite de p_n quand n tend vers l'infini? Étudier la limite de $(1-p_n)^n$ quand n tend vers l'infini.

(c) Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} P(S_n = k) = e^{\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

(3) On pose $N_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$.

(a) Quelles sont les valeurs que peut prendre la variable aléatoire N_n?

(b) Calculer

$$\lim_{n\to+\infty} P(N_n = 0).$$

(c) En déduire la limite en loi de la suite $(N_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 9.

On admet que si Z_1 et Z_2 sont deux variables aléatoires **à densité**, définies sur le même espace probabilisé, alors leur covariance, si elle existe, est définie par :

$$\mathrm{Cov}(Z_1, Z_2) = E(Z_1 Z_2) - E(Z_1)E(Z_2).$$

On **admet** également que si Z_1 et Z_2 sont indépendantes alors leur covariance est nulle.

On considère deux variables aléatoires réelles X et U définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$, indépendantes, X suivant la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ et U prenant ses valeurs dans $\{-1; 1\}$ et telle que

$$P(U=1) = P(U=-1) = \frac{1}{2}.$$

On pose $Y = UX$ et on admet que Y est une variable aléatoire à densité, définie elle aussi sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$.

(1) (a) En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que :

$$\mathrm{P}(Y \le x) = \mathrm{P}([U=1] \cap [X \le x]) + \mathrm{P}([U=-1] \cap [X \ge -x]).$$

(b) En déduire que Y suit la même loi que X.

(2) (a) Calculer l'espérance de U puis montrer que $E(XY) = 0$.

(b) En déduire que $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$.

(3) (a) Rappeler la valeur de $E(X^2)$ et en déduire que

$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{2\pi}.$$

(b) Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$ converge et vaut $\frac{3}{2}\sqrt{2\pi}$.

(c) Établir finalement que X possède un moment d'ordre 4 et que $E(X^4) = 3$.

(4) (a) Vérifier que $E(X^2 Y^2) = 3$.

(b) Déterminer $\mathrm{Cov}(X^2, Y^2)$.

(c) En déduire que X^2 et Y^2 ne sont pas indépendantes. Montrer alors que X et Y ne le sont pas non plus.

(d) Cet exercice a permis de montrer qu'un résultat classique concernant les variables discrètes est encore valable pour les variabales à densité. Lequel ?

Exercice 10. Une action vaut initialement $X_0 = 1$ euros. A chaque instant $n \geq 1$, sa valeur est multipliée par une quantité aléatoire Z_n. On suppose que les variables aléatoires (Z_n) sont indépendantes et de même loi

$$P(Z_n = 1 + a) = P(Z_n = 1 - a) = \frac{1}{2},$$

pour une certaine valeur $a \in]0;1[$. On note X_n la valeur de l'action à l'instant n. Ainsi, on a, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$X_n = \prod_{k=1}^{n} Z_k.$$

On pose $Y_k = \ln(Z_k)$ et on définit $\overline{Y}_n$ la moyenne empirique des Y_k.

(1) Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $E(X_n) = 1$.

(2) Exprimer $E(\overline{Y}_n)$ et $V(\overline{Y}_n)$ en fonction de a et de n.

(3) Montrer, à l'aide l'inégalité de Bienaymé-Tchébychev, qu'en notant $\delta = -\frac{1}{4}\ln(1-a^2) > 0$, on a

$$\lim_{n \to +\infty} P(Y_1 + Y_2 + ... + Y_n \geq -n\delta) = 0.$$

(4) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que, pour n assez grand, on a

$$P(X_n \geq \varepsilon) \leq P(Y_1 + Y_2 + ... + Y_n \geq -n\delta).$$

(5) Commenter.

(6) Une explication.

(a) Montrer que

$$P\left(X_n \leq \frac{1}{2}\right) \leq 4V(X_n).$$

(b) En déduire que $V(X_n)$ ne tend pas vers 0. Ainsi X_n ne se concentre pas autour de son espérance.

(c) Montrer même que

$$V(X_n) = (1+a)^n - 1$$

tend vers $+\infty$.