Math ECG 2. 2022-2023

Mathématiques Approfondies - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
H2B - Lycée Carnot, Paris 17e.

Quinzaine de colle n°1

Période du 09/01 au 20/01

Semaine du 09/01 au 13/01

Programme de colle

- Vecteurs aléatoires. (un exercice max)
- Rappels d'algèbre bilinéaire.
- Endomorphismes symétriques. Projections orthogonales.

Questions de cours

- Rappels d'algèbre bilinéaire: Inégalité de Cauchy-Schwarz, théorème de Pythagore. Montrer qu'un sev est en somme directe avec son orthogonal...
- Soit f un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E et $\mathcal{B}$ une B.O.N de E. Montrer que
$$f \text{ symétrique } \iff \mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}) \text{ symétrique}$$
- Un calcul de distance à un sev ou la recherche de l'expression d'une projection orthogonale.

Suggestions d'exercices

Exercice 1. On considère l'ensemble
$$E = \{P \in \mathbb{R}[X] : \ P(0) = P(1) = 0\}$$

(1) Montrer que E est un espace vectoriel.

(2) Montrer que l'application φ définie sur $E \times E$ par
$$\varphi(P, Q) = -\int_0^1 P(t)Q''(t)\mathrm{d}t$$
est un produit scalaire sur E.

Exercice 2. Montrer le caractère symétrique de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par
$$f(x, y, z) = (3x + y + z, x + 3y + z, x + y + 3z).$$

Exercice 3. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ (muni de son produit scalaire canonique) dont la matrice dans la base canonique est
$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Montrer que f est une projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ que l'on déterminera.

Exercice 4. On considère $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire

$$\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(A\,{}^tB)$$

et on introduit le sous-espace vectoriel $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} :\ a, b \in \mathbb{R} \right\}$.

(1) Déterminer une b.o.n de F.

(2) Déterminer la projection orthogonale de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $F^{\perp}$.

Exercice 5. Dans tous les exercice, on considère $a_0, a_1, ...a_n$ des réels **distincts**. On introduit, pour $P, Q \in E = \mathbb{R}_n[X]$ l'application φ définie sur $E \times E$ par

$$\varphi(P, Q) = \sum_{i=1}^{n} P(a_i)Q(a_i)$$

(1) Montrer que φ définit un produit scalaire sur E.

(2) On introduit la famille $(P_k)_{0\leq k\leq n}$ définie par

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \qquad P_k(X) = \prod_{j\in[\![0,n]\!]\setminus\{k\}} (X - a_j).$$

  (a) Vérifier que (P_k) est une famille orthogonale.

  (b) Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, déterminer $||P_k||$.

  (c) On considère le sous-espace

$$H = \{P \in E :\ \sum_{k=0}^{n} P(a_k) = 0\}$$

    (i) Montrer que H est un hyperplan de E.

    (ii) Déterminer une base (R) de $H^{\perp}$.

    (iii) Soit $Q \in E$. Exprimer la distance de Q à H.

Semaine du 16/01 au 20/01

Programme de colle

- Endomorphismes symétriques. Projections orthogonales. Réduction des endomorphismes symétriques. Formes quadratiques.
- Reprise du **DS n°4** du 14/01.

Questions de cours

- Diagonaliser une matrice symétrique dans une b.o.n
- Soit q la forme quadratique associée à un endomorphisme symétrique u (d'un espace euclidien E). En notant $(e_1, ..., e_n)$ une b.o.n de E telle que $u(e_i) = \lambda e_i$, montrer que, pour tout $x \in E$,
$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle x, e_i \rangle^2.$$
En déduire un encadrement de $q(x)$ par des multiples de $||x||^2$.
- Déterminer le signe d'une forme quadratique.

Suggestions d'exercices

Exercice 6. On considère la matrice $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

(1) (a) Justifier qu'il existe une matrice P orthogonale et une matrice D diagonale telles que
$$J = PD\,{}^tP.$$
(b) Déterminer le rang de J. En déduire une première valeur propre et la dimension du sous-espace propre associé.
(c) Déterminer la matrice D. On ne demande pas d'expliciter P.

(2) On note f la forme quadratique définie par
$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j.$$
(a) Déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associée à f, c'est à dire telle que, pour tout $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, on ait
$$f(x_1, ..., x_n) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$
(b) Montrer que
$$f(x_1, ..., x_n) = \frac{n}{2} y_n^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} y_i^2, \qquad \text{où} \qquad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = {}^tP \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

(3) Soit $\mathcal{S} = \{u \in \mathbb{R}^n : \; ||u||^2 = 1\}$.

(i) En gardant les notations ci-dessus, montrer que
$$(x_1, ..., x_n) \in \mathcal{S} \iff (y_1, ..., y_n) \in \mathcal{S}.$$
(ii) Montrer alors que f admet un minimum et un maximum sur $\mathcal{S}$ et préciser leurs valeurs.