# Math ECG 2. 2022-2023

Mathématiques Approfondies - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
H2B - Lycée Carnot, Paris 17e.

CARNOT

---

## Quinzaine de colle n°2

*Période du 23/01 au 10/02*

---

## Semaine du 23/01 au 27/01

### Programme de colle

- Reprise du **DS** du 14/01
- Inégalités probabilistes. Convergence en proba, convergence en loi. Loi faible des grands nombres. Théorème central Limite.
- Révisions en vue du Concours Blanc

### Questions de cours

- Définitions des différents modes de convergence. Lien entre les deux. Enoncé de la LfGN comme un résultat de convergence. Énoncé du TCL.

- Soient $X \hookrightarrow N(0,1)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{U}\{-1;1\})$ indépendantes. Déterminer (rigoureusement) la loi de $XY$.

- Soit $\Phi$ la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0,1)$. Montrer rigoureusement que
$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \Phi(k+1) - \Phi(k) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-k/2}$$
- En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que
$$\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} \mathrm{d}t \geq \sqrt{2\pi}\left(1 - \frac{1}{2x^2}\right).$$

### Suggestions d'exercices

**Exercice 1.** Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f_n$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f_n(x) = \begin{cases} a_n\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n, & \text{si } 0 \leq x \leq n \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$
(1) Déterminer $a_n$ de sorte que $f_n$ soit une densité de probabilité. On note $X_n$ une v.a ayant $f_n$ pour densité.
(2) Déterminer la fonction de répartition de $X_n$.
(3) Montrer que la suite $(X_n)$ converge en loi vers une v.a $Z$ à préciser.

**Exercice 2.** Soit $X$ une v.a suivant une loi $\mathcal{E}(\lambda)$.
(1) Justifier que, pour tout $\varepsilon > 0$, on a
$$P\left(X - \frac{1}{\lambda} > \varepsilon\right) \leq P\left(\left|X - \frac{1}{\lambda}\right| > \varepsilon\right)$$

(2) En déduire, à l'aide de l'inégalité de BT que
$$P\left(X > \frac{3}{\lambda}\right) \leq \frac{1}{4}.$$

**Exercice 3.** Soit $p$ un réel de $]0;1[$ et $q = 1-p$. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, de même loi de Bernoulli telle que :
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad P(X_k = 1) = p, \quad \text{et} \quad P(X_k = 0) = q.$$
Pour $n$ entier de $\mathbb{N}^*$, on définit pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, la variable aléatoire $Y_k = X_k + X_{k+1}$.

(1) (a) Calculer pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, $\operatorname{Cov}(Y_k, Y_{k+1})$.
(b) Montrer que
$$0 < \operatorname{Cov}(Y_k, Y_{k+1}) < \frac{1}{4}.$$

(2) Calculer, pour tout couple $(k,l)$ tel que $1 \leq k < l \leq n$, $\operatorname{Cov}(Y_k, Y_l)$.

(3) On note $\varepsilon$ un réel strictement positif fixé. Montrer que
$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k - 2p\right| > \varepsilon\right) = 0.$$

**Exercice 4.** Soit $\lambda > 0$ fixé pour tout l'exercice. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note $g_k$ une densité de la loi Gamma $\Gamma(k, \lambda)$.

(1) Redémontrer que si $X_1$ et $X_2$ sont deux variables aléatoires indépendantes de même loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$, alors
$$X_1 + X_2 \hookrightarrow \Gamma(2, \lambda)$$
(2) Montrer que $g_k \star g_\ell = g_{k+\ell}$, où $\star$ désigne le produit de convolution.
(3) En déduire que si $X$ et $Y$ sont deux variables aléatoires indépendants de lois respectives $\Gamma(k,\lambda)$ et $\Gamma(\ell, \lambda)$ alors $X+Y$ suit la loi $\Gamma(k+\ell, \lambda)$.
(4) Montrer par récurrence que, si $X_1, .., X_n$ sont des variables indépendantes de même loi $\mathcal{E}(\lambda)$, alors
$$X_1 + X_2 + ... + X_n \hookrightarrow \Gamma(n, \lambda).$$
(5) Soit $Z_n \hookrightarrow \Gamma(n, \lambda)$. Montrer que
$$\frac{\lambda}{\sqrt{n}} Z_n - \sqrt{n} \xrightarrow{\mathcal{L}} Z,$$
où $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.

**Exercice 5.** Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a > 0$. On considère une suite de v.a. $(X_n)$ dont la fonction de répartition est donnée par
$$F_{X_n}(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ 1 - \exp\left(-ax - \frac{x^2}{2n}\right), & \text{si } 0 \leq x < 2n \\ 1, & \text{si } x \leq 2n \end{cases}$$
(1) Montrer que $(X_n)$ converge en loi vers une v.a dont on précisera la loi.
(2) Soient $Z \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$ et $\alpha \in ]0;1[$.
(a) Déterminer deux réels $c$ et $d$ strictement positifs tels que
$$P(c \leq Z \leq d) = 1 - \alpha, \quad \text{et} \quad P(Z \leq c) = \frac{\alpha}{2}.$$
(b) Quelle est la loi de $aZ$?
(c) Montrer que
$$\lim_{n\to+\infty} P\left(a \in \left[\frac{c}{X_n}; \frac{d}{X_n}\right]\right) = 1 - \alpha.$$

**Exercice 6.** Pour $n$ un entier naturel supérieur ou égal à 2, on considère une variable aléatoire $(X_n)$ définie par

$$X_n(\Omega) = [\![2; n+1]\!], \qquad P(X_n = k) = \frac{(k-1)}{n^k}\binom{n+1}{k}, \qquad k \in [\![2; n+1]\!].$$

(1) (a) Montrer que

$$\frac{(k-1)}{n^k}\binom{n+1}{k} = \frac{1}{n^{k-1}}\binom{n}{k-1} + \frac{1}{n^k}\binom{n}{k-1} - \frac{1}{n^k}\binom{n+1}{k}.$$

(b) (*) À l'aide du triangle de Pascal, vérifier que la formule précédente définit bien une variable aléatoire.

(2) Pour tout entier $k \geq 2$, on pose $u_k = \dfrac{k-1}{k!}$.

(a) Vérifier que $(u_k)$ est une distribution de probabilité. On note alors $Z$ une v.a telle que $P(Z = k) = u_k$.
(b) Montrer que la suite $(X_n)$ converge en loi vers $Z$.

**Exercice 7.** On note $\lambda$ un paramètre réel strictement positif. On considère la fonction $f_\lambda$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{2\sqrt{x}}e^{-\lambda\sqrt{x}}, & \text{si } x > 0 \\ 0, & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

(1) (a) Montrer que la fonction $f_\lambda$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
(b) Dresser le tableau de variation de $f_\lambda$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et préciser les limites de $f_\lambda(x)$ lorsque $x \to 0^+$ et lorsque $x \to +\infty$.
(c) Établir la convexité de la fonction $f_\lambda$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
(d) Tracer l'allure de la courbe représentative de $f_1$ dans le plan rapporté à un repère orthogonal.

(2) (a) Vérifier que la fonction $x \longmapsto -e^{-\lambda\sqrt{x}}$ est une primitive de $f_\lambda$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
(b) Établir la convergence et calculer la valeur de de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_\lambda(x)\mathrm{d}x$.
(c) En déduire que la fonction $f_\lambda$ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

(3) Soit $X$ une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs strictement positives, ayant $f_\lambda$ pour densité.
On note $F_\lambda$ la fonction de répartition de $X$ et on pose: $Y = \lambda\sqrt{X}$.

(a) Calculer pour tout $x$ réel, $F_\lambda(x)$.
(b) Montrer que $Y$ suit la loi exponentielle de paramètre 1.
(c) Établir pour tout $r$ de $\mathbb{N}^*$, l'existence de $E(Y^r)$.
(d) Montrer que pour tout $r$ de $\mathbb{N}^*$, on a: $E(Y^{r+1}) = (r+1)E(Y^r)$.
(e) En déduire pour tout $r$ de $\mathbb{N}^*$, $E(Y^r)$ et $E(X^r)$. En particulier, calculer $E(X)$ et $V(X)$.

(4) Soit $(X_1, X_2, ..., X_n)$ un $n-$échantillon de $X$. Soient également $(a_n)$ et $(b_n)$ deux suites de réels strictement positifs vérifiant

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 a_n = 1, \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} n^2 b_n = 0.$$

On pose pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$,

$$M_n = \min(X_1, .., X_n), \quad J_n = \frac{M_n - b_n}{a_n}.$$

Montrer que la suite $(J_n)$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

**Exercice 8.** Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta > 0$. On dit qu'une variable aléatoire réelle à densité suit une loi de Laplace de paramètre $(\alpha, \beta)$, notée $\mathcal{L}(\alpha, \beta)$, si elle admet comme densité la fonction $f$ donnée par:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \frac{1}{2\beta} \exp\left(-\frac{|t-\alpha|}{\beta}\right)$$

(1) Vérifier que $f$ est bien une densité de probabilité d'une variable aléatoire réelle.
(2) Déterminer la fonction de répartition, notée $\Psi$, de la loi $\mathcal{L}(0, 1)$.
(3) On suppose que $X$ suit la loi $\mathcal{L}(0, 1)$.
  (a) Montrer que $\beta X + \alpha$ suit la loi $\mathcal{L}(\alpha, \beta)$.
  (b) En déduire la fonction de répartition de la loi $\mathcal{L}(\alpha, \beta)$.

(4) Espérance et variance.
  (a) On suppose que $X$ suit la loi $\mathcal{L}(0, 1)$.
  Montrer que $E(X)$ et $V(X)$ existent et valent respectivement 0 et 2.
  (b) En déduire l'existence et les valeurs de l'espérance et de la variance d'une variable aléatoire réelle qui suit la loi $\mathcal{L}(\alpha, \beta)$.

(5) Simulation à partir d'une loi exponentielle.
Soit $U$ une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre 1 et $V$ une variable aléatoire qui suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$ et indépendante de $U$.

  (a) En utilisant le système complet naturellement associé à $V$, montrer que $X = (2V - 1)U$ suit la loi $\mathcal{L}(0, 1)$.
  (b) Compléter la définition Python ci-dessous pour que la fonction ainsi définie réalise la simulation d'une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{L}(\alpha, \beta)$:

```
def Laplace(alpha, beta):
    if ......... <= 1/2:
        V = 1
    else :
        V = 0
    return ................
```

# Semaine du 06/02 au 10/02

### Programme de colle

- Reprise du **Concours Blanc**
- Tout le chapitre de Convergences. Exercices semaine précédente.
- Révisions sur les fonctions de deux variables (calculs de dérivées partielles, recherche de point critique) en vue du Chapitre d'optimisation.

### Questions de cours

- Définitions des différents modes de convergence. Lien entre les deux. Enoncé de la LfGN comme un résultat de convergence. Énoncé du TCL.

- Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ et $Y = e^{tX}$, où $t \in \mathbb{R}$. Déterminer à l'aide du théorème de transfert et d'un changement de variable affine $E(Y)$ en fonction de $t$.

- Montrer que $(x, y) \mapsto x^2 - y^2$ admet un unique point critique et qu'il s'agit d'un point selle.

**Exercice 9.** Montrer que $f$ présente un maximum local mais pas global en $(0, 0)$ et étudier l'existence d'extrema globaux, pour $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)\ln(x^2 + y^2), & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$