Math ECG 2. 2022-2023

Mathématiques Approfondies - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
H2B - Lycée Carnot, Paris 17e.

Quinzaine de colle n°3

Période du 13/02 au .....

Semaine du 13/02 au 17/02

Programme de colle

- **Chapitre III.** On cherchera des *extrema* sur des ouverts *via* les valeurs propres de la Hessienne. On donnera des exemples où on raisonne sur le signe des valeurs propres sans les trouver explicitement.
- Révisions des trois derniers chapitres en vu du DS n°4.

Questions de cours

- Condition nécessaire du premier ordre à la présence d'un extremum. Condition suffisante du second ordre pour la nature d'un point critique. (Énoncés sans les preuves).
- Déterminer les points critiques et les *extrema* éventuels de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x) = \exp(-x^2 - y^2)$.

Suggestions d'exercices

Exercice 1. Pour tout réel $a \in \mathbb{R} \setminus \left\{0; -\dfrac{1}{2}\right\}$, on considère la fonction f_a, définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f_a(x, y) = \left(1 + y + xy + ax^2\right) e^y.$$

(1) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

(2) (a) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f_a.
(b) En déduire que f_a possède deux points critiques dont on précisera les coordonnées.

(3) Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f_a.

(4) Montrer que, si λ_1 et λ_2 sont les racines d'un trinôme de la forme $x^2 - sx + p$ alors

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 &= s \\ \lambda_1\lambda_2 &= p \end{cases}$$

(5) (a) Examiner, pour chacun des deux points critiques, à quelle condition portant sur a, f_a présente en ces points un extremum local. (*On utilisera la question précédente.*)
(b) Déterminer, en distinguant trois cas, si f_a présente sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ un maximum local ou un minimum local et donner sa valeur en fonction de a.

Exercice 2. Dans tout l'exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 2 et x et y deux réels de l'intervalle $]0;1[$. On considère deux variables aléatoires réelles indépendantes $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,x)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n,y)$ et on définit ensuite la variable aléatoire Z en posant

$$Z = 2n - X - Y.$$

(1) On introduit aussi la variable aléatoire W définie par $W = XYZ$. Montrer que l'espérance de W est donnée par

$$E(W) = n^2(n-1)xy(2-x-y).$$

(2) On pose $D =]0;1[\times]0;1[$. On admet que D est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et on définit, pour $(x,y) \in D$, la fonction f par

$$f(x,y) = xy(2-x-y).$$

(a) Représenter graphiquement le domaine D.
(b) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur D.
(c) Montrer qu'il existe un unique point A de D où f est susceptible de présenter un extremum.
(d) Montrer que f présente bien un extremum local en A. Préciser sa nature et sa valeur.
(e) Calculer

$$\frac{1}{4}\left(y-\frac{2}{3}\right)^2\left(y-\frac{8}{3}\right) - y\left(x+\frac{1}{2}y-1\right)^2.$$

(f) En déduire que l'extremum local trouvé précédemment est finalement un extremum global.

Exercice 3. On considère les fonctions

$$f :]0;+\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \longmapsto (x+\ln(x))e^{x-1}$$

et

$$F :]0;+\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \longmapsto F(x) = \int_1^x f(t)\,dt.$$

(1) Étudier f et F.
(2) Montrer que f est bijective.
(3) Montrer que l'équation $x + \ln x = e$ d'inconnue $x \in]0;+\infty[$ admet une unique solution, que l'on notera α, et montrer que : $1 < \alpha < e$.

On considère l'application de classe $\mathcal{C}^2$

$$G :]0;+\infty[^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \longmapsto G(x,y) = F(x) + F(y) - 2e^{\frac{x+y}{2}}.$$

(4) Établir que, pour tout $(x,y) \in]0;+\infty[^2$, (x,y) est un point critique de G si et seulement si

$$x = y \quad \text{et} \quad x + \ln x = e.$$

(5) En déduire que G admet comme unique point critique le point (α,α) et montrer que la matrice Hessienne de G au point (α,α) s'écrit :

$$H = \nabla^2(G)(\alpha,\alpha) = \begin{pmatrix} f'(\alpha) - \dfrac{e^\alpha}{2} & -\dfrac{e^\alpha}{2} \\ -\dfrac{e^\alpha}{2} & f'(\alpha) - \dfrac{e^\alpha}{2} \end{pmatrix} = f'(\alpha)I_2 - \frac{e^\alpha}{2}M$$

où

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(6) (a) Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$ et X un vecteur propre de M associé à λ. Montrer que

$$HX = \left(f'(\alpha) - \frac{e^\alpha}{2}\lambda\right)X$$

et en déduire que

$$\mathrm{Sp}(H) = \{f'(\alpha), f'(\alpha) - e^\alpha\}.$$

(b) Montrer que $f'(\alpha) > e^\alpha$. En déduire que G admet un extremum local et préciser sa nature.