Math ECG 2. 2022-2023

Mathématiques Appliquées - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
ENC Bessières, Paris 17e.

Chapitre 0. Révisions

On propose, pour attaquer cette rentrée du meilleur pied, de consacrer les premières séances à des révisions - sous forme d'exercices accessibles pour tou.te.s - balayant (sans exhaustivité) le programme du cours de première année. Une partie de ces exercices pourra être reprise en *khôlle*.

1 Calculs & Récurrences

Exercice 1. Démontrer par récurrence les résultats suivants.

(1) Soit (u_n) une suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n}$.
Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \frac{2}{2n+1}.$$

(2) Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \qquad \sum_{k=1}^{n} kx^k = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}.$$

(3) Rappeler la formule du triangle de Pascal.
Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall p \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{p+k}{k} = \binom{p+n+1}{n}.$$

(4) Soit f la fonction définie sur $[0;1[$ par
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$$
Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\forall x \in [0;1[, \qquad f^{(n)}(x) = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!}(1-x)^{-n-\frac{1}{2}}.$$
où $f^{(n)}$ désigne la dérivée $n-$ième de f.

(5)

Question type de sujet de concours

Soient A, D et P trois matrices telles que : $A = PDP^{-1}$. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad A^n = PD^nP^{-1}.$$

Exercice 2 (Calculs de sommes)**.** (1) Rappeler les formules de sommes (finies) du cours de première année.

(2) Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} k(2k^2-1) = \frac{n(n+1)(n^2+n-1)}{2}.$$

(3) Montrer que

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \left(\frac{1}{2^i}\right)^2 = \frac{4^n-1}{3\cdot 4^{2n}}.$$

(4) Calculer

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{(k+1)^2} - \frac{1}{k^2}\right) \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right).$$

(5) Rappeler la formule du binôme de Newton.
Calculer

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} 3^k.$$

(6)

Question type de sujet de concours

Montrer que pour tout $k \in [\![1;n]\!]$

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

En déduire la valeur, pour tout $x \in \mathbb{R}$, de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}x^k$.

Exercice 3 (Séries usuelles)**.** Justifier la convergence des séries suivantes et calculer leur somme.

(1) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n(n-1)}{6^n}$ (2) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{2^n}{(n+1)!}$ (3) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n^2+n}{n!}$

Exercice 4 (Sommes doubles)**.** Calculer les sommes suivantes

(i) $\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} (i-j)$, (ii) $\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} \max(i,j)$, (iii) $\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} |i-j|$, (iv) $\displaystyle\sum_{0\leq i<j\leq n} \binom{j}{i}2^i$

(v) $\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} (i+j)^2$, (vi) $\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} \frac{i}{i+j}$, (vii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \ln(i^k)$, $(viii)$ $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}(-1)^{i+j}$.

(et en admettant la convergence)

$$(ix) \sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{i^j}{i!j!}$$

2 Algèbre Linéaire

Exercice 5. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Résoudre les équations $AX = 0$, $AX = X$ et $AX = 3X$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On présentera les solutions sous forme d'un Vect().

Exercice 6. On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(1) À l'aide d'un pivot de Gauss, montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
(2) Calculer P^2. Retrouver alors le résultat de la question précédente.

Exercice 7. Déterminer, à l'aide de la formule du binôme les puissances A^n où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 8. Soient a et b deux réels, avec $b \neq 0$.
On considère la matrice M et N définies par

$$M = \begin{pmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} b & b & b & b \\ b & b & b & b \\ b & b & b & b \\ b & b & b & b \end{pmatrix}.$$

(1) Déterminer des réels x et y tels que $M = xN + yI$ où I est la matrice unité d'ordre 4.

(2) Compléter la fonction `SciLab` ci-dessous permettant de renvoyer la matrice M.

```
def matrice_M(a,b):
    return ...*np.ones(...) - ... *np.eye(...)
```

(3) Calculer N^2. Conjecturer une formule pour N^k que l'on démontrera par récurrence.
(4) En déduire pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, la valeur de M^n en fonction de I, de N et de n. On montrera que

$$M^n = (a-b)^n I + \frac{(a+3b)^n - (a-b)^n}{4b} N.$$

3 Analyse

Exercice 9.

Question type de sujet de concours

Montrer que, pour tout $x \in]-1, +\infty[$, $\ln(1+x) \leq x$.

Exercice 10. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x\ln(x), & \text{si } x > 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

(1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.
(2) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Exprimer la dérivée $f'(x)$ pour $x > 0$.
(3) La fonction est-elle dérivable en 0? Quelles en sont les conséquences graphiques?

Exercice 11. Que vaut

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n ?$$

Exercice 12. On s'intéresse à l'équation différentielle

$$(E) \qquad y'' - y' = e^{2x} - e^x.$$

(1) Résoudre l'équation différentielle homogène associée.
(2) On a utiliser le principe de superposition. On introduit les deux équations différentielles

$$(E_1) \qquad y'' - y' = e^{2x}, \qquad (E_2) \qquad y'' - y' = -e^x$$

   (a) Déterminer une solution particulière de (E_1) de la forme $y(x) = \lambda e^{2x}$.
   (b) Déterminer une solution particulière de (E_2) de la forme $y(x) = \mu x e^{-x}$.
(3) Conclure

Exercice 13 (Suite et série)**.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$.

(1) Compléter la fonction Python ci-dessous de sorte qu'elle renvoie u_n

```
def suite_u(n):
    u = ...
    ......
        u = ...
    return ...
```

(2) Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.
(3) Étudier le sens de variation et la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi que sa limite.
(4) On pose pour tout entier n, $v_n = \ln(u_n)$.
Calculer v_{n+1} en fonction de v_n puis montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} u_k = v_0 - v_{n+1}$
(5) En déduire que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge.

Exercice 14 (Intégrales)**.** Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit :

$$I_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x)\mathrm{d}x$$

(1) (a) Calculer la dérivée de la fonction $g : x \mapsto (x+1)\ln(x+1) - x$.
   (b) Calculer I_0.
(2) (a) Montrer que $I_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Établir que la suite (I_n) est décroissante.
   (c) En déduire que la suite (I_n) est convergente.
(3) (a) Justifier l'égalité : $x^n \ln(1+x) \leq x^n$ pour tout $x \in [0,1]$.
   (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\qquad I_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.
   (c) Calculer $\lim_{n\to+\infty} I_n$
(4) (a) En utilisant une intégration par parties, montrer que:

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad I_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\mathrm{d}x$$

   (b) Montrer que

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\mathrm{d}x \leq \frac{1}{n+2}$$

   et en déduire un encadrement de I_n.
   (c) En déduire $\lim_{n\to+\infty} nI_n$

4 Probabilités

Exercice 15. On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés. Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir un 6 lors d'un lancer est $\frac{1}{2}$.

(1) On lance un dé au hasard parmi les 100 dés et on obtient 6. À l'aide de la formule de Bayes, déterminer la probabilité que le dé choisi soit pipé.
(2) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On choisit un dé au hasard parmi les 100. On lance ce dé n fois et on obtient n fois le chiffre 6. Quelle est la probabilité p_n que ce dé soit pipé?
(3) Déterminer $\lim_{n\to+\infty} p_n$. Interpréter ce résultat.

Exercice 16. Une partie d'un jeu se déroule comme suit. On lance deux dés :

- si les scores des deux dés sont les mêmes, on marque deux points;
- si le score du premier est strictement supérieur à celui du second, on marque un point;
- sinon on ne marque aucun point.

On répète n partie du même jeu (de manière indépendante). On note X_i la variable aléatoire correspondant au nombre de points marqués à la partie i et T_i le total du score après i parties.

(1) Déterminer la loi de chaque X_i ainsi que leur espérance.
(2) Exprimer T_i en fonction des X_j. En moyenne, combien de parties au minimum doit faire le joueur pour obtenir plus de 10 points?
(3) Déterminer la loi de T_1.
(4) Déterminer la loi de T_2.
(5) Écrire une fonction Python `simul_T(i)` permettant de simuler T_i.

Exercice 17. Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p. La valeur renvoyée par X a-t-elle plus de chances d'être paire ou impaire ? Quelle réponse élémentaire aurait-on pu proposer si $p = 1/2$?

Exercice 18. (**) Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On considère une urne $\mathcal{U}$ contenant n boules numérotées de 1 à n et indiscernables au toucher.
On effectue une suite de tirages d'une boule avec remise de la boule dans l'urne $\mathcal{U}$.

Pour tout entier k supérieur ou égal à 1, on note Z_k la variable aléatoire égale au nombre de numéros distincts obtenus au cours des k premiers tirages et on note $E(Z_k)$ l'espérance de Z_k.

(1) Déterminer la loi de la variable Z_1 et la loi de la variable Z_2. En déduire $E(Z_1)$ et $E(Z_2)$.

(2) Soit k un entier supérieur ou égal à 1.

(a) Déterminer $\mathrm{P}(Z_k = 1)$ et déterminer $\mathrm{P}(Z_k = k)$.
(b) Montrer, pour tout $\ell \in [\![1, n]\!]$:
$$\mathrm{P}(Z_{k+1} = \ell) = \frac{\ell}{n}\mathrm{P}(Z_k = \ell) + \frac{n-\ell+1}{n}\mathrm{P}(Z_k = \ell - 1).$$
(c) En déduire que
$$E(Z_{k+1}) = \frac{n-1}{n}E(Z_k) + 1.$$

(3) (a) Montrer que la suite $(v_k)_{k\geqslant 1}$ de terme général $v_k = E(Z_k) - n$ est une suite géométrique.
(b) En déduire, pour tout entier k supérieur ou égal à 1,
$$E(Z_k) = n\left(1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^k\right).$$

Exercice 19. (Olive et Tom)

Olive et Tom s'affrontent aux tirs au but et se lancent dans une succession de tirs, chacun leur tour - en commençant par Olive - jusqu'à ce que l'un des deux ait deux buts d'avance sur son adversaire. Tom est un peu meilleur qu'Olive; il marque trois fois sur cinq alors que son ami ne marque qu'une fois sur trois.

On désigne le premier joueur à tirer par un *Pile* ou *Face* et il s'agit d'une confrontation en *Mort subite*: le premier joueur voyant son score être de deux points supérieur à son adversaire est déclaré vainqueur.

Illustration

(1) Écrire une fonction Python simulant la confrontation et faisant apparaître le nom du vainqueur.
(2) Modifier la fonction précédente pour qu'elle renvoit 1 si Olive gagne et 0 sinon. Estimer la fréquence de victoire d'Olive sur 1000 confrontations.
(3) (*) Calculer de manière théorique la probabilité de victoire d'Olive.

Exercice 20. Soit $p \in]0;1[$. On dispose d'une pièce de monnaie qui amène *Pile* avec la probabilité p, et *Face* avec la probabilité $1-p$.

On lance la pièce jusqu'à obtenir pour la seconde fois *Pile*. On note X la variable aléatoire égale au nombre de *Face* obtenus au cours des lancers.

(1) (a) Déterminer $P(X=0)$ et $P(X=1)$.
(b) Plus généralement, déterminer la loi de la variable aléatoire X.
(c) Vérifier que
$$\sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k) = 1.$$

(2) Que peut-on dire de l'événement « on n'obtient jamais deux *Pile* au cours d'une infinité de lancers de la pièce » ?

(3) Montrer que la variable X admet une espérance et la calculer.

(4) Compléter le code Python ci-dessous afin qu'il affiche une réalisation de la variable X

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

def simul_X(p):
    n_pile=0
    n_lancers=1
    while .... :
        if  .... :
            ...
            ...
    return ...
```

Exercice 21. On considère la matrice M définie par :

$$M = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et les trois vecteurs de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ suivants

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ V_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(1) La matrice M est-elle inversible ?
(2) (*Pour nos khubes*) La matrice M est-elle diagonalisable ?
(3) Calculer MV_1, MV_2 et MV_3 en fonction de V_1, V_2 et V_3.

Une urne contient une boule rouge et deux boules blanches. On effectue dans cette urne une succession de tirages d'une boule selon le protocole suivant :

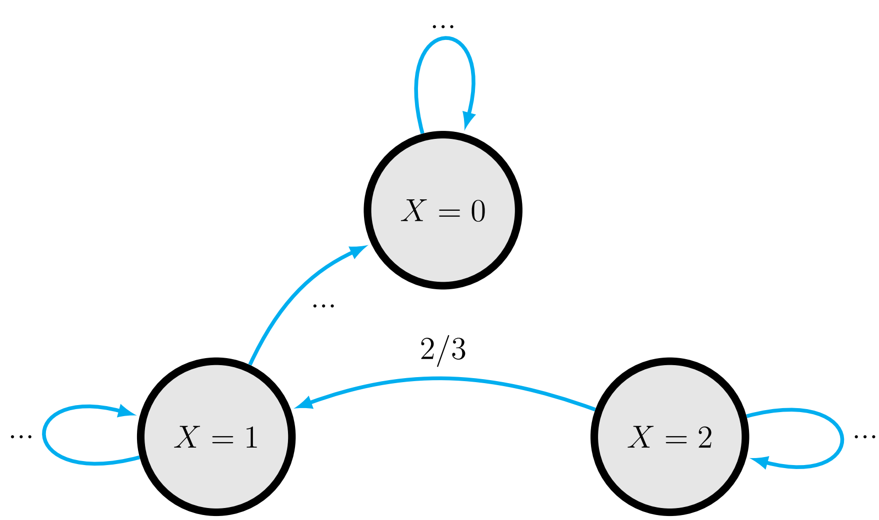
- si la boule tirée est rouge, elle est remise dans l'urne.
- si la boule tirée est blanche, elle n'est pas remise dans l'urne.

Pour tout entier i supérieur ou égal à 1, on note B_i (respectivement R_i) l'événement "on obtient une boule blanche (respectivement une boule rouge) lors du $i^{ème}$ tirage".

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on note X_n le nombre de boules blanches contenues dans l'urne à l'issue du $n^{ème}$ tirage et on pose $X_0 = 2$.

On introduit la matrice colonne $U_n = \begin{pmatrix} P[X_n = 0] \\ P[X_n = 1] \\ P[X_n = 2] \end{pmatrix}$.

(4) (a) Déterminer pour tout entier naturel n, l'ensemble des valeurs prises par la variable X_n (on distinguera les trois cas : $n = 0, n = 1$ et $n \geq 2$).
(b) Recopier et compléter **en justifiant** le *diagramme de transition* ci-contre de la suite (X_n) (pour $n \geq 2$). On précisera notamment à quelles probabilités conditionnelles correspondent les valeurs sur les flèches du diagramme.



(c) En utilisant la formule des probabilités totales avec un système complet d'évènements construit avec la variable X_n, montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a l'égalité suivante :

$$P(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{2}P(X_n = 1) + \frac{2}{3}P(X_n = 2).$$

Montrer de même qu'on a
$$U_{n+1} = MU_n.$$
Vérifier que l'égalité précédente reste valable pour $n = 0$ et $n = 1$.

(d) En déduire par récurrence, pour tout entier naturel n, la relation suivante :
$$U_n = V_1 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^n V_2 + \left(\frac{1}{3}\right)^n V_3.$$

(e) Donner la loi de la variable X_n .

(5) Calculer $E(X_n)$, espérance de X_n , ainsi que sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.

(6) Recopier et compléter la fonction suivante permettant de représenter graphiquement la *trajectoire* de la v.a. X_n.

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
import matplotlib.pyplot as plt

def traj_X(n):
    X=np.zeros(n+1)
    X[0]=..........
    for i in range (1, n+1):
        if X[i-1]==0 :
            X[i]=.....
        elif ...... :
            X[i]= ...
        else:
            ........
    N=[k for k in range(n+1)]
    plt.grid()
    plt.plot(N, X, 'ko')
    plt.show()
```

Exercice 22. (Inspiré par **ECRICOME 2018**)

Dans une fête foraine, un stand propose le jeu suivant : le joueur lance n fois une pièce; il gagne 10 euros pour chaque *Pile* obtenu si le nombre de *Pile* est pair, mais si ce nombre est impair, c'est lui qui doit alors payer 10 euros pour chaque *Pile* obtenu.
La pièce est truquée, et à chaque lancer, la probabilité d'obtenir *Pile* est égale à p ($p \in]0, 1[$), et celle d'obtenir *Face* est de $1 - p$.
On notera X la variable aléatoire égale au nombre de *Pile* obtenus, et G la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

(1) On suppose dans cette question uniquement que $n = 3$ et $p = \dfrac{2}{3}$.
(a) Reconnaître la loi de X et vérifier que $P(A) = 13/27$.
(b) Montrer que $G(\Omega) = \{-30, -10, 0, 20\}$, puis expliciter la loi de G.
(c) Calculer l'espérance de G. Le jeu est-il favorable au joueur ?

(2) On revient au cas général.
(a) Justifier que $G = 10(-1)^X X$.
(b) En déduire une fonction Python `simul_G(p)` qui renvoie une simulation de G.
(c) En déduire $E(G)$ en fonction de n et p à l'aide du théorème de transfert.