Chapitre 10. Systèmes différentiels linéaires

Dans tout le chapitre, I désigne un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

Le début de ce chapitre reprend une partie du cours de première année sur les équations différentielles linéaires dont on encourage dans tous les cas au moins une relecture.

1 Équations différentielles linéaires à coefficients constants

Définition

On appelle **équation différentielle linéaire à coefficients constants** toute équation différentielle de la forme

$$(E) \qquad a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = b$$

où

- $n \in \mathbb{N}^*$
- a_0, a_1, $\ldots$, a_n sont des constantes, appelées coefficients de l'équation différentielle
- $t \mapsto b(t)$ est une fonction (a priori non constante) définie sur I, appelée **second membre**
- l'inconnue $y : t \mapsto y(t)$ est une fonction définie et (au moins) dérivable n fois sur I et, pour $0 \leq k \leq n$, $y^{(k)}$ désigne la dérivée $k-$ième de y.

Si la fonction b est nulle, on dit que l'équation est **homogène**.
Si $a_n \neq 0$, on dit que l'équation est **d'ordre** n.

☞ En général, on note (E_0) l'équation différentielle homogène associée :

$$(E_0) \qquad a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

Définition

On appelle **équilibre** toute solution constante.

Exemple

(1) $y' = y$ est
- linéaire
- à coefficients constants
- homogène
- d'ordre 1

(2) $y'' - y = 0$ est
- linéaire
- à coefficients constants
- homogène
- d'ordre 2

(3) $y' = 2y + 5$ est
- linéaire
- à coefficients constants
- non homogène
- d'ordre 1

(4) $y' = y^2$ est
- non linéaire
- d'ordre 1

(5) $y' + ty = 1 + t^2$ est
- linéaire
- à coefficients non constants (t n'est pas une constante)
- non homogène
- d'ordre 1

(6) $y''' + y'' + y' + y = e^t$ est
- linéaire
- à coefficients constants
- non homogène
- d'ordre 3

Propriété

Principe de superposition.

Soient

(E_1) $$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = b_1$$

et

(E_2) $$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = b_2$$

deux équations différentielles linéaires à coefficients constants différant seulement par leur second membre. Soient y_1 une solution de (E_1) et y_2 une solution de (E_2).
Alors, $y_1 + y_2$ est une solution de l'équation différentielle

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = b_1 + b_2$$

Exemple

La fonction $y_1 : t \mapsto -1$ est solution de l'équation différentielle $y' - y = 1$ et la fonction $y_2 : t \mapsto te^t$ est solution de l'équation différentielle $y' - y = e^t$.
D'après le principe de superposition, la fonction $f = y_1 + y_2 : t \mapsto -1 + te^t$ est solution de l'équation différentielle $y' - y = 1 + e^t$. On peut le vérifier facilement par le calcul.

À retenir!

☞ Le principe de superposition dit en substance que

$$\text{résoudre l'équation différentielle } (E) \iff \begin{cases} \text{résoudre l'équation différentielle homogène } (E_0) \\ \text{et} \\ \text{trouver une solution particulière de } (E) \end{cases}$$

2 Équations différentielles linéaires à coeff. constants d'ordre 1

2.1 Définition(s)

Définition

On appelle **équation différentielle linéaire d'ordre** 1 **à coefficients constants** toute équation différentielle de la forme

$$(E) \qquad y' + ay = b$$

où

- $a \in \mathbb{R}^*$ est une constante non nulle
- b est une fonction continue sur I (a priori non constante)
- l'inconnue y est une fonction définie et dérivable sur I.

Remarque

Si $a = 0$, résoudre l'équation différentielle revient à calculer une primitive de b.

2.2 Le cas homogène

Propriété

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 à coefficients constants $(E_0) : y' + ay = 0$ est

$$S_0 = \left\{t \mapsto \lambda e^{-at} \ : \ \lambda \in \mathbb{R}\right\}.$$

Pour le dire autrement, y est une solution de (E_0) si et seulement si il existe une constante $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $y(t) = \lambda e^{-at}$. En particulier, on remarque qu'il existe une infinité de solutions.

Définition

Problème de Cauchy pour une équation différentielle d'ordre 1**.**

Soit $c \in \mathbb{R}$. Résoudre le *problème de Cauchy*

$$\begin{cases} y' + ay = 0 \\ y(0) = c \end{cases},$$

c'est trouver les solutions de l'équation différentielle $y' + ay = 0$ qui vérifient la condition initiale $y(0) = c$.

Propriété

Existence et unicité d'une solution au problème de Cauchy.

Soit $c \in \mathbb{R}$. On considère le problème de Cauchy

$$(P_0) \qquad \begin{cases} y' + ay = 0 \\ y(0) = c \end{cases}.$$

Il existe une unique solution au problème de Cauchy (P_0), qui est la fonction

$$f : t \mapsto ce^{-at}$$

Remarque

L'équation différentielle $y' + ay = 0$ possède une infinité de solutions mais il n'en reste plus qu'une lorsqu'on fixe la condition initiale. Ainsi, si deux solutions de $y' + ay = 0$ vérifient la même condition initiale, alors elles sont identiques.

2.3 Point de vue algébrique sur l'équation différentielle homogène

☞ On peut écrire l'ensemble des solutions d'une équation différence homogène comme un sous-espace vectoriel engendré par une fonction

$$S_0 = \left\{t \mapsto \lambda e^{-at} \ : \ \lambda \in \mathbb{R}\right\} = \mathrm{Vect}(f),$$

où $f : t \mapsto e^{-at}$. Cette écriture montre que S_0 est un sous-espace vectoriel de dimension 1 de l'espace vectoriel $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

De plus, théorème d'existence et d'unicité d'une solution au problème de Cauchy se reformule comme le fait que l'application (clairement) linéaire

$$\Phi : \left| \begin{array}{ccc} S_0 & \to & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & y(0) \end{array} \right.$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

2.4 Recherche d'une solution particulière : la méthode de variation de la constante (Hors-programme)

Hors Programme mais...

Méthode de de variation de la constante.

Considérons une solution $f : t \mapsto \lambda e^{-at}$ de l'équation différentielle homogène (E_0). Comme son nom l'indique, la méthode consiste à faire varier la constante λ pour trouver une solution particulière de l'équation différentielle avec second membre (E). Plus précisément, on considère finalement la fonction

$$f : t \mapsto \lambda(t)e^{-at} \qquad \text{(la constante } \lambda \text{ n'en est plus une, elle dépend maintenant de } t\text{)}$$

et on suppose que la fonction $t \mapsto \lambda(t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Par dérivation d'un produit, on obtient, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f'(t) = \lambda'(t)e^{-at} - a\lambda(t)e^{-at} = \lambda'(t)e^{-at} - af(t)$$

d'où les équivalences :

$$\begin{aligned}
f \text{ est solution de } (E) &\iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad f'(t) + af(t) = b(t) \\
&\iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad \lambda'(t)e^{-at} - \cancel{af(t)} + \cancel{af(t)} = b(t) \\
&\iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad \lambda'(t) = b(t)e^{at} \\
&\iff \text{la fonction } \lambda \text{ est une primitive de la fonction } t \mapsto b(t)e^{at} \text{ sur } \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Or, par hypothèse, b est continue sur $\mathbb{R}$ donc la fonction $t \mapsto b(t)e^{at}$ est également continue sur $\mathbb{R}$ et donc elle admet une primitive sur $\mathbb{R}$. Notons $t \mapsto k(t)$ une telle primitive. Ainsi, la fonction

$$f : t \mapsto k(t)e^{-at}$$

est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

Remarque

Il faudra refaire le raisonnement précédent à chaque fois que l'on souhaite trouver une solution particulière pour savoir quelle primitive calculer. De plus, il faut se souvenir que la fonction
$$t \mapsto \int_0^t b(x)e^{ax}\mathrm{d}x$$
est l'unique primitive de $t \mapsto b(t)e^{at}$ sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0. On peut donc calculer une primitive en calculant une intégrale (on a alors accès aux techniques usuelles de calcul : IPP et changement de variable).

Remarque

La méthode de la variation de la constante montre qu'il existe toujours une solution de l'équation différentielle (E) : $y' + ay = b$ lorsque la fonction b est continue.

2.5 Résolution complète

Propriété

Soit (E) : $y' + ay = b$ une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants. Soit y_p une solution particulière de (E). L'ensemble des solutions de (E) est
$$S = \{y_p + y_0 \ : \ y_0 \in S_0\} = \left\{t \mapsto y_p(t) + \lambda e^{-at} \ : \ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

Exercice 1. On considère l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants
$$(E) \qquad\qquad y' + 2y = 1 + t.$$

(1) Résoudre l'équation homogène associée à (E).
(2) Déterminer en reprenant les étapes de la *méthode de la variation de la constante* une solution particulière de (E).
(3) Donner toutes les solutions de (E).

2.6 Compléments sur la recherche de solutions particulières

On considère toujours dans ce paragraphe l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants
$$(E) \qquad\qquad y' + ay = b$$
et on rappelle que $a \neq 0$.

Propriété

Si b est une constante, alors l'équation différentielle (E) admet pour solution particulière la fonction constante
$$t \mapsto \frac{b}{a}$$
Cette solution particulière est l'unique équilibre de l'équation différentielle (E).

Propriété

Si b est une fonction polynomiale, alors il existe une solution particulière de (E) qui soit également une fonction polynomiale, de même degré que b.

Propriété

On suppose que $b : t \mapsto Q(t)e^{\gamma t}$ où $\gamma \in \mathbb{R}$ et Q est une fonction polynomiale. Alors il existe une solution particulière de (E) qui soit de la forme

- $t \mapsto R(t)e^{\gamma t}$ si $\gamma \neq -a$
- $t \mapsto tR(t)e^{\gamma t}$ si $\gamma = -a$

où R est une fonction polynomiale de même degré que Q.

3 Equations différentielles linéaires à coeff. constants d'ordre 2

3.1 Définition

Définition

On appelle **équation différentielle linéaire d'ordre** 2 **à coefficients constants** toute équation différentielle de la forme

$$(E) \qquad y'' + ay' + by = c$$

où

- $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}^*$ sont deux constantes
- c est une fonction continue sur I (a priori non constante)
- l'inconnue $y : t \mapsto y(t)$ est une fonction définie et (au moins) deux fois dérivable sur I

Remarque

Si $b = 0$, on se ramène à une équation différentielle d'ordre 1 en posant $z = y'$.

3.2 Le cas homogène

Notons

$$(E_0) \qquad y'' + ay' + by = 0$$

l'équation différentielle homogène associée. La résolution d'une telle équation est analogue à la résolution des suites récurrentes linéaires d'ordre 2. On introduit le **polynôme caractéristique** :

$$P(X) = X^2 + aX + b$$

Propriété

Notons Δ le discriminant du polynôme $P(X) = X^2 + aX + b$. Il y a trois cas possibles :

- Si $\Delta > 0$, alors le polynôme $P(X)$ admet deux racines distinctes notées r_1 et r_2. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène (E_0) est alors
$$\begin{aligned} S_0 &= \left\{t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t} \ : \ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\} \\ &= \mathrm{Vect}\left(t \mapsto e^{r_1 t}, t \mapsto e^{r_2 t}\right) \end{aligned}$$
- Si $\Delta = 0$, alors le polynôme $P(X)$ admet une unique racine notée r_0. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène (E_0) est alors
$$\begin{aligned} S_0 &= \left\{t \mapsto (\lambda t + \mu)e^{r_0 t} \ : \ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\} \\ &= \mathrm{Vect}\left(t \mapsto te^{r_0 t}, t \mapsto e^{r_0 t}\right) \end{aligned}$$
- Si $\Delta < 0$, alors le polynôme $P(X)$ n'admet pas de racines réelles et on ne peut rien dire (cas hors-programme).

Définition

Problème de Cauchy pour une équation différentielle d'ordre 2.

Soit $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$. Résoudre le *problème de Cauchy*

$$\begin{cases} y''+ay'+by=0 \\ y(0)=\alpha \\ y'(0)=\beta \end{cases},$$

c'est trouver les solutions de l'équation différentielle $y''+ay'+by=0$ qui vérifient les deux conditions initiales $y(0)=\alpha$ et $y'(0)=\beta$.

Remarque

Pour une équation différentielle d'ordre n, il faut fixer n conditions initiales sur y et ses dérivées successives pour obtenir un problème de Cauchy bien posé. Toutes les conditions initiales doivent être considérées *au même instant*. On retiendra le tableau suivant pour savoir quelles sont les conditions initiales à fixer pour un problème de Cauchy.

Ordre	Condition initiale
1	$y(0)$
2	$y(0)$ et $y'(0)$
3	$y(0)$, $y'(0)$ et $y''(0)$
...	...

Propriété

Existence et unicité d'une solution au problème de Cauchy.

Soit $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$. On considère le problème de Cauchy

$$(P_0)\qquad \begin{cases} y''+ay'+by=0 \\ y(0)=\alpha \\ y'(0)=\beta \end{cases}$$

Il existe une unique solution au problème de Cauchy (P_0). Plus précisément,

- Si $\Delta>0$, alors le polynôme $P(X)$ admet deux racines distinctes notées r_1 et r_2. L'unique solution du problème de Cauchy (P_0) est la fonction
$$t\mapsto \lambda e^{r_1 t}+\mu e^{r_2 t}$$
où (λ,μ) est le couple solution du système linéaire
$$\begin{cases} y(0)=\alpha \\ y'(0)=\beta \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda + \mu = \alpha \\ r_1\lambda + r_2\mu = \beta \end{cases}$$
- Si $\Delta=0$, alors le polynôme $P(X)$ admet une unique racine notée r_0. L'unique solution du problème de Cauchy (P_0) est la fonction
$$t\mapsto (\lambda t+\mu)e^{r_0 t}$$
où (λ,μ) est le couple solution du système linéaire
$$\begin{cases} y(0)=\alpha \\ y'(0)=\beta \end{cases} \iff \begin{cases} \mu = \alpha \\ \lambda + r_0\mu = \beta \end{cases}$$

3.3 Recherche d'une solution particulière : se laisser guider par l'énoncé

☞ Il n'y a pas de résultat à connaître : l'énoncé doit donner une indication.

Exercice 2. On considère l'équation différentielle $y'' + y' - 2y = (10 + 8t)e^{2t}$. Déterminer une solution particulière de la forme $t \mapsto cte^{2t}$ où $c \in \mathbb{R}$.

3.4 Résolution complète

Propriété

Soit (E) : $y'' + ay' + by = c$ une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants. Soit y_p une solution particulière de (E). L'ensemble des solutions de (E) est

$$S = \{y_p + y_0 \ : \ y_0 \in S_0\}$$

Propriété

Existence et unicité d'une solution au problème de Cauchy.

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. On considère le problème de Cauchy

$$(P) \qquad \begin{cases} y'' + ay' + by = c \\ y(0) = \alpha \\ y'(0) = \beta \end{cases}$$

Il existe une unique solution au problème de Cauchy (P).

Exercice 3. On reprend l'équation différentielle $y'' + y' - 2y = (10 + 8t)e^{2t}$ dont on a trouvé une solution particulière dans l'exercice précédent. Résoudre complètement cette équation différentielle.

3.5 Compléments sur la recherche de solutions particulières

On considère toujours dans ce paragraphe l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants

$$(E) : \qquad y'' + ay' + by = c$$

et on rappelle que $b \neq 0$.

Propriété

Si c est une constante, alors l'équation différentielle (E) admet pour solution particulière la fonction constante

$$t \mapsto \frac{c}{b}$$

Cette solution particulière est l'unique équilibre de l'équation différentielle (E).

Propriété

Si c est une fonction polynomiale, alors il existe une solution particulière de (E) qui soit également une fonction polynomiale, de même degré que c.

Propriété

On suppose que $c : t \mapsto Q(t)e^{\gamma t}$ où $\gamma \in \mathbb{R}$ et Q est une fonction polynomiale. On rappelle qu'on note $P(X)$ le polynôme caractéristique associé à l'équation différentielle (E). Alors il existe une solution particulière de (E) qui soit de la forme

- $t \mapsto R(t)e^{\gamma t}$ si γ n'est pas racine de $P(X)$
- $t \mapsto tR(t)e^{\gamma t}$ si γ est une racine simple de $P(X)$
- $t \mapsto t^2R(t)e^{\gamma t}$ si γ est une racine double de $P(X)$

où R est une fonction polynomiale de même degré que Q.

4 Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants

4.1 Définitions et écriture matricielle

Définition

On appelle **système différentiel linéaire à coefficients constants** toute équation différentielle linéaire de la forme

$$(E) \qquad \begin{cases} x_1' = a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n \\ x_2' = a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n \\ \vdots \\ x_n' = a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,n}x_n \end{cases}$$

où

- $n \in \mathbb{N}^*$
- les $a_{i,j}$ sont des constantes réelles, appelées *coefficients* du système différentiel
- $x_1, \ldots, x_n$ désignent des fonctions inconnues, que l'on supposera être définies (et dérivables) sur $\mathbb{R}$ tout entier

☞ On peut réécrire le système différentiel (E) sous la forme

$$X' = AX$$

où $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Remarque

Ici, $X : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$. Ainsi, les solutions du système différentiel linéaire sont des applications à valeurs **vectorielles** (à valeurs dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ si l'on adopte le point de vue matriciel). On pourra également présenter les solutions sous la forme d'un vecteur ligne $(x_1, \ldots, x_n)$ si l'énoncé nous invite à le faire.

Définition

On appelle **point d'équilibre** ou **état d'équilibre** du système différentiel $X' = AX$ toute solution constituée de fonctions constantes. On a alors l'équivalence :

$$(x_1, \dots, x_n) \text{ est un point d'équilibre} \iff A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

Propriété

La matrice A est inversible si et seulement si l'unique point d'équilibre du système différentiel linéaire $X' = AX$ est le point $(0, \dots, 0) = 0_{\mathbb{R}^n}$.

Définition

On appelle **trajectoire** du système différentiel $X' = AX$ tout ensemble de la forme

$$\{(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n \ : \ t \in \mathbb{R}\}$$

où $(x_1, \dots, x_n)$ est une solution du système différentiel $X' = AX$.

Remarque

La trajectoire d'un équilibre est réduite à un point.

Définition

Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une solution du système différentiel linéaire $X' = AX$. Soit $(\ell_1, \dots, \ell_n) \in \mathbb{R}^n$.

On dit que la trajectoire $\{(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n \ : \ t \in \mathbb{R}\}$ **converge** vers $(\ell_1, \dots, \ell_n)$ si, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$\lim_{t \to +\infty} x_i(t) = \ell_i.$$

Si il n'existe pas de tel n-uplet $(\ell_1, \dots, \ell_n)$, alors on dit que la trajectoire **diverge**.

4.2 Résolution dans le cas où la matrice A est diagonalisable

Propriété

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable. On note

- $\alpha_1, \ \dots, \ \alpha_n$ les valeurs propres de A (non nécessairement distinctes, chaque valeur propre apparaît autant de fois que la dimension du sous-espace propre associé)
- $(U_1, \dots, U_n)$ une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A telle que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, U_i est un vecteur propre associé à la valeur propre α_i.

Alors l'ensemble des solutions du système différentiel linéaire $X' = AX$ est

$$\begin{aligned} S_0 &= \left\{t \mapsto \lambda_1 e^{\alpha_1 t} U_1 + \cdots + \lambda_n e^{\alpha_n t} U_n \ : \ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n\right\} \\ &= \left\{t \mapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e^{\alpha_i t} U_i \ : \ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n\right\} \\ &= \operatorname{Vect}\left(t \mapsto e^{\alpha_1 t} U_1, \dots, t \mapsto e^{\alpha_n t} U_n\right) \end{aligned}$$

Remarque

Les solutions sont définies sur $\mathbb{R}$ tout entier et S_0 est un espace vectoriel.

À retenir!

☞ Résoudre le système différentiel $X' = AX$ dans le cas où A est diagonalisable revient à déterminer les valeurs propres de A et une base de chacun de ses sous-espaces propres. En concaténant chacune de ces bases, on obtient une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A.

Exercice 4. On considère le système différentiel linéaire

$$\begin{cases} x_1' &= x_1 + 2x_2 - x_3 \\ x_2' &= 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 \\ x_3' &= -x_1 - 2x_2 + x_3 \end{cases}$$

(1) Expliciter une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $X' = AX$, où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.
(2) Justifier que A est diagonalisable. Donner sans calcul une première valeur propre de A.
(3) Calculer $A^2(A - 6I)$. En déduire le spectre de A.
(4) Diagonaliser A.
(5) Déterminer, pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'expression de $X(t)$.

Définition

Problème de Cauchy pour un système différentiel linéaire.

Soit $t_0 \in \mathbb{R}$ et soit $X^0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Résoudre le *problème de Cauchy*

$$\begin{cases} X' = AX \\ X(t_0) = X^0 \end{cases},$$

c'est trouver les solutions du système différentiel linéaire $X' = AX$ qui vérifient la condition initiale $X(t_0) = X^0$, *i.e.*

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad x_i(t_0) = x_i^0$$

Remarque

On a exprimé le problème de Cauchy à un instant quelconque t_0 plutôt qu'en 0 pour gagner en généralité dans cette partie, mais la plupart du temps on choisit $t_0 = 0$ dans les exercices.

Propriété

Existence et unicité d'une solution au problème de Cauchy.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable. Soit $t_0 \in \mathbb{R}$ et soit $X^0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On considère le problème de Cauchy

$$(P) \qquad \begin{cases} X' = AX \\ X(t_0) = X^0 \end{cases}$$

Il existe une unique solution au problème de Cauchy (P).

Exercice 5. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Résoudre le problème de Cauchy $\begin{cases} X' = AX \\ X(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$.

Propriété

Spectre et convergence des trajectoires.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable. On considère le système différentiel linéaire $X' = AX$.

- Si toutes les valeurs propres de A sont négatives ou nulles, alors toutes les trajectoires du système convergent vers un point d'équilibre et on dit que ces points d'équilibres sont **stables**.
- Si A possède au moins une valeur propre strictement positive, alors il existe des trajectoires divergentes.

4.3 Résolution guidée dans le cas où la matrice A n'est pas diagonalisable

Exercice 6. On considère le système différentiel linéaire

$$(E) \qquad \begin{cases} x' = x + 2y - 2z \\ y' = -4x - 3y + 4z \\ z' = -2x + z \end{cases}$$

où x, y, z sont trois fonctions inconnues, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

(1) Déterminer $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que X solution de (E) si et seulement si $X' = AX$.

(2) On introduit la matrice inversible P dont on admet que l'inverse est donnée par la matrice P^{-1} ci-après

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

  (a) Montrer que $P^{-1}AP = T$ où T est la matrice triangulaire supérieure $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

  (b) On pose $Y = P^{-1}X$. Montrer que $X' = AX \iff Y' = TY$.

(3) (a) Résoudre l'équation différentielle $(E_1) : \varphi' = \varphi$.

  (b) Résoudre l'équation différentielle $(E_2) : \varphi' = -\varphi$.

  (c) Soit $c \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction $t \mapsto cte^{-t}$ est une solution particulière de l'équation différentielle $(E_3) : \varphi' = -\varphi + ce^{-t}$.

(4) On note $Y = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ et on suppose que $Y' = TY$.

Montrer que α est solution de (E_1), γ est solution de (E_2) et β est solution de (E_3) pour un réel c bien choisi.

(5) En déduire que si $X' = AX$, alors il existe des réels $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} x(t) = (2\lambda_1 t + \lambda_2 - \lambda_1)e^{-t} \\ y(t) = 2\lambda_1 e^{-t} + \lambda_3 e^t \\ z(t) = (2\lambda_1 t + \lambda_2)e^{-t} + \lambda_3 e^t \end{cases}$$

(6) En déduire une solution de (E) non stationnaire qui converge vers l'unique état équilibre du système.

4.4 Lien entre système différentiel linéaire et équation différentielle linéaire d'ordre 2

On considère une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 2

$$(E) \qquad y'' + ay' + by = 0$$

où $b \neq 0$. En posant

$$X = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix},$$

on se ramène à un système différentiel linéaire, plus précisément, on obtient l'équivalence :

$$X \text{ solution de } (E) \iff X' = AX.$$

Il est facile de déterminer le spectre de A. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} \lambda \text{ valeur propre de } A & \iff A - \lambda I \text{ non inversible} \\ & \iff \det(A - \lambda I) = 0 \\ & \iff \lambda^2 + a\lambda + b = 0 \\ & \iff P(\lambda) = 0, \end{aligned}$$

où $P(X)$ est le polynôme caractéristique associé à l'équation différentielle (E).

Remarque

Cas où $P(X)$ admet deux racines distinctes r_1 et r_2.

Alors A possède deux valeurs propres distinctes r_1 et r_2 et donc A est diagonalisable. Notons

$$U_i = \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix}$$

un vecteur propre de A associé à r_i. D'après le cours, les solutions générales de $X' = AX$ sont de la forme

$$X : t \mapsto \lambda_1 e^{r_1 t} U_1 + \lambda_2 e^{r_2 t} U_2, \qquad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2.$$

En prenant la première coordonnée, on en déduit que les solutions générales de (E) sont de la forme

$$y : t \mapsto \lambda_1 u_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 u_2 e^{r_2 t}, \qquad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$$

et on a retrouvé la formule de première année à condition que $u_1 \neq 0$ et $u_2 \neq 0$.
On a $AU_1 = r_1 U_1$ donc

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ -bu_1 - av_1 \end{pmatrix} = r_1 \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}$$

Supposons que $u_1 = 0$. On trouve alors $v_1 = r_1 \times 0 = 0$ et donc $U_1 = 0$. Cela contredit le fait que U_1 est un vecteur propre.

☞ Dans le cas où $P(X)$ admet une racine double r_0, A possède une unique valeur propre et donc A n'est pas diagonalisable. Il faut *trigonaliser* A (voir l'exercice de la partie précédente) pour retrouver la formule de première année...

4.5 Dessins de trajectoires dans le plan : équilibres et convergence

On considère une matrice $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ diagonale. On note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. On a

$$\begin{aligned} X' = AX &\iff \begin{cases} x' = \lambda_1 x \\ y' = \lambda_2 y \end{cases} \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x(t) = x(0)e^{\lambda_1 t} \\ y(t) = y(0)e^{\lambda_2 t} \end{cases} \end{aligned}$$

Remarquons que $x(0) = 0$ si et seulement si, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x(t) = 0$. Plaçons nous dans le cas où $x(0) \neq 0$. On peut alors écrire

$$t = \frac{1}{\lambda_1} \ln\left(\frac{x(t)}{x(0)}\right)$$

ce qui donne, en injectant cette formule dans celle donnant $y(t)$:

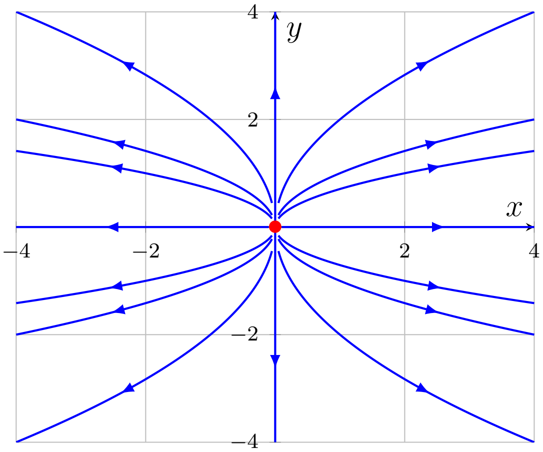
$$y(t) = y(0)\left(\frac{x(t)}{x(0)}\right)^{\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}}$$

On peut faire disparaître la dépendance en t pour ne garder que la relation entre y et x (c'est l'équation des trajectoires) :

$$y = y(0)\left(\frac{x}{x(0)}\right)^{\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}}$$

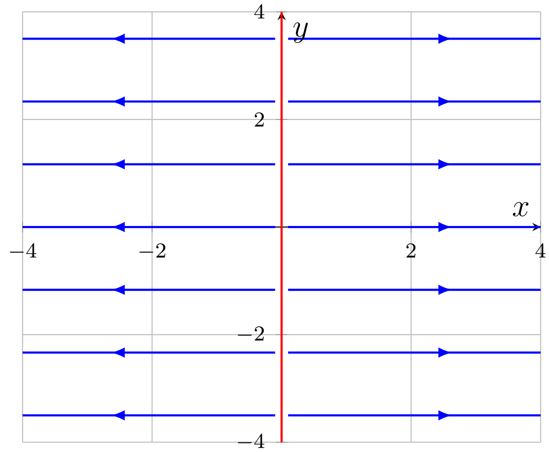
Le dessin des trajectoires dépend du signe des valeurs propres λ_1 et λ_2.

☞ Cas où $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$:



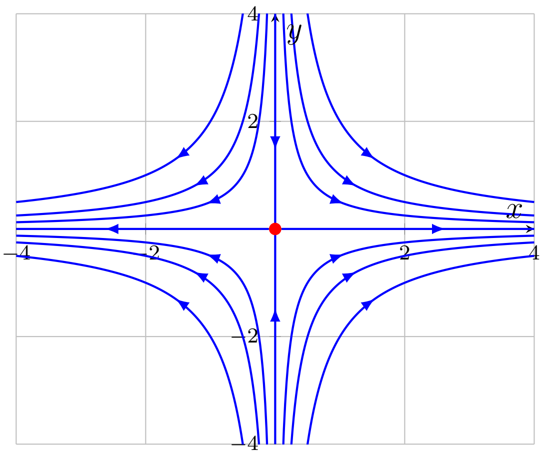
Aucune trajectoire non stationnaire ne converge. L'unique point d'équilibre est instable.

☞ Cas où $\lambda_1 > \lambda_2 = 0$:



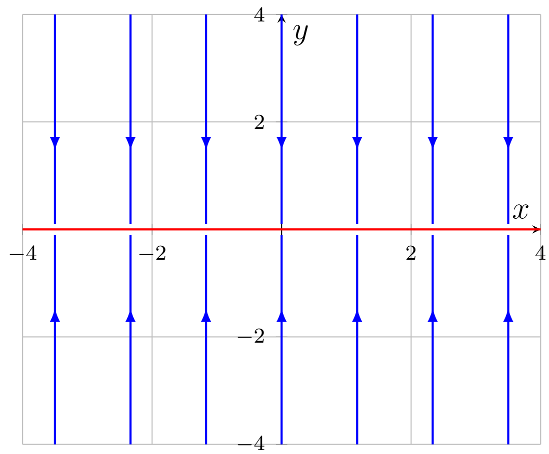
Aucune trajectoire non stationnaire ne converge. Infinité de points d'équilibres, tous instables.

☞ Cas où $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$:



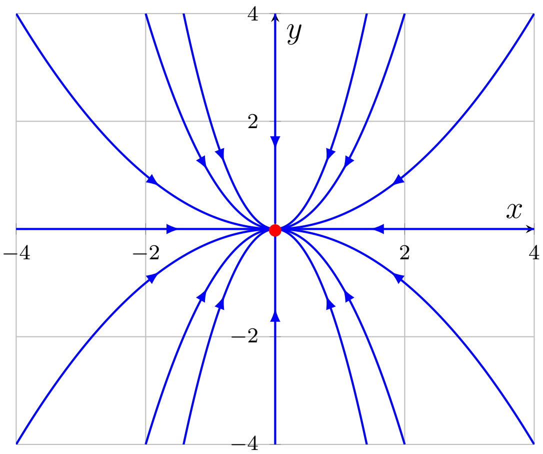
On remarque que la plupart des trajectoires divergent mais que deux trajectoires remarquables convergent vers l'unique point d'équilibre $(0, 0)$. On dit dans cette situation que le point d'équilibre est un point selle.

☞ Cas où $\lambda_1 = 0 > \lambda_2$:



Toutes les trajectoires convergent. Infinité de points d'équilibres, tous sont stables.

☞ Cas où $0 > \lambda_1 > \lambda_2$:



Toutes les trajectoires convergent vers l'unique point d'équilibre, stable.

À retenir!

Tableau récapitulatif de la nature des points d'équilibre :

λ_1 \ λ_2	$\lambda_2 < 0$	$\lambda_2 = 0$	$\lambda_2 > 0$
$\lambda_1 < 0$	stable	stables	selle
$\lambda_1 = 0$	stables	stables	instables
$\lambda_1 > 0$	selle	instables	instable

5 Sélection d'exercices - Travaux dirigés

Exercice 1001. Résoudre les équations différentielles linéaires homogènes d'ordre 1 à coefficients constants suivantes.

(1) $y' = 2y$ (2) $y' - 3y = 0$ (3) $y' + 4y = 0$

Exercice 1002. Résoudre les problèmes de Cauchy suivants.

(1) $\begin{cases} y' + 10y = 0 \\ y(0) = 10 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} y' - 7y = 0 \\ y(0) = -3 \end{cases}$ (3) $\begin{cases} y' = 8y \\ y(0) = -1 \end{cases}$

Exercice 1003. Déterminer l'ensemble des solutions des équations différentielles suivantes :

(1) $y' + 2y = 3$ (2) $y' - y = t^2 + 1$ (3) $y' + y = te^t$

Exercice 1004. Déterminer les solutions de l'équation différentielle $y' - 3y = t\ln(t)e^{3t}$.

Exercice 1005. Déterminer l'ensemble des solutions des équations différentielles suivantes :

(1) $y'' - 3y' + 2y = 0$ (2) $y'' - 4y' + 4y = 0$ (3) $y'' - 2y = 0$

Exercice 1006. Résoudre les problèmes de Cauchy suivants.

(1) $\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} y'' - 4y' + 4y = 0 \\ y(0) = -3 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$ (3) $\begin{cases} y'' - 2y = 0 \\ y(0) = -1 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$

Exercice 1007. Déterminer l'ensemble des solutions des équations différentielles suivantes :

(1) $y'' - 3y' + 2y = 1 + t$
(2) $y'' - 3y' + 2y = te^t$
(3) $y'' - 4y' + 4y = te^{2t}$
(4) $y'' - 4y' + 4y = (-1 + t)e^{-t}$
(5) $y'' - 2y = e^t$
(6) $y'' - 2y = 1 - 2t + 3t^2$

Exercice 1008. Déterminer les solutions de l'équation différentielle $y'' - y' = 0$ de deux manières différentes :

(1) En appliquant le théorème du cours sur les équations différentielles linéaires d'ordre 2.
(2) En faisant un changement de fonction inconnue pour se ramener à une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

Exercice 1009. Soit $(a, b) \in]0, +\infty[^2$. On considère l'équation différentielle logistique (non linéaire)

(E) $$y' = ay - aby^2$$

(1) Déterminer les équilibres de l'équation logistique.
(2) Soit f une solution de (E) sur $[0, +\infty[$ qui ne s'annule pas (on admet qu'une telle solution existe).
   (a) On pose $z = \dfrac{1}{f}$. Montrer que z satisfait une équation différentielle linéaire puis montrer que, pour tout $t \geq 0$, $z(t) = b + (z(0) - b)e^{-at}$.
   (b) En déduire que, pour tout $t \geq 0$, $f(t) = \dfrac{f(0)}{bf(0) + (1 - bf(0))e^{-at}}$.
(3) Calculer $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t)$. Que remarque-t-on ?

Exercice 1010. On considère le système différentiel

$$\begin{cases} x_1' &= x_2 + x_3 \\ x_2' &= -x_1 + 2x_2 + x_3 \\ x_3' &= x_1 + x_3 \end{cases}$$

(1) Expliciter une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $X' = AX$, où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.
(2) Calculer $A^3 - 3A^2$. En déduire le spectre de A.
(3) Diagonaliser A.
(4) Déterminer, pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'expression de $X(t)$.

6 Un Sujet Zéro - Ecricome 2023

Partie 1

Soit A la matrice carrée d'ordre 3 donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -4 \\ 3 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

et doit f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dont la matrice dans la base canonique est A.

(1) Déterminer le rang de $A - 6I$.
En déduire une valeur propre de A et la dimension du sous-espace propre associé.
(2) Soit $V = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $U = AV - 2V$.
Montrer que U est un vecteur propre de A et déterminer la valeur propre associée.
(3) Posons $W = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
  (a) Montrer que (U, V, W) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
  (b) Donner la matrice B de f dans cette base.
  (c) Montrer alors qu'il existe une matrice P inversible telle que $A = PBP^{-1}$ et expliciter P. On ne cherchera pas P^{-1}.

(4) La matrice A est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable?

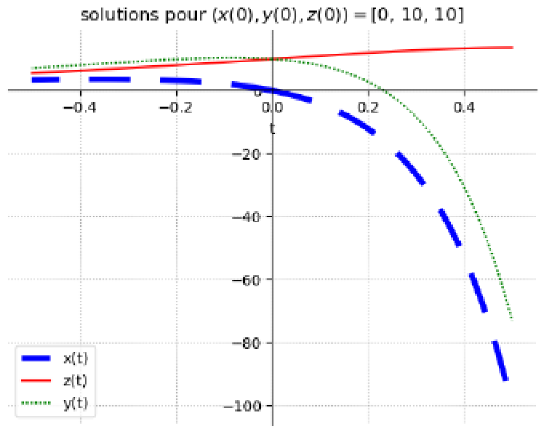
Partie 2

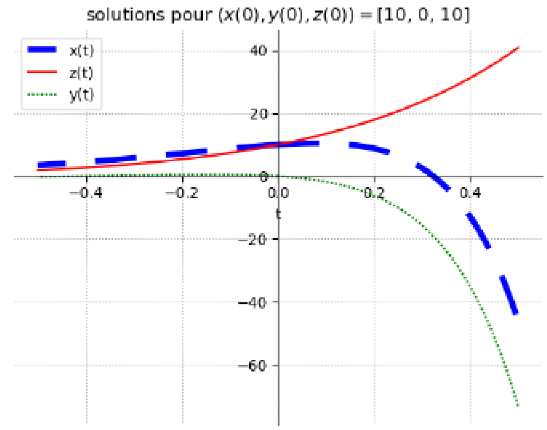
On considère le système différentiel suivant

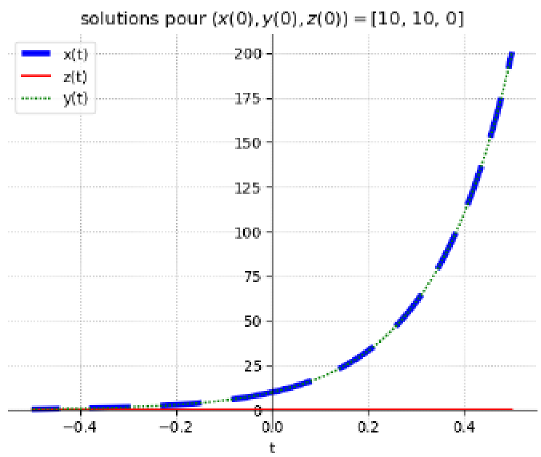
$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \begin{cases} x'(t) &= 5x(t) + y(t) - 4z(t) \\ y'(t) &= 3x(t) + 3y(t) - 4z(t) \\ z'(t) &= x(t) - y(t) + z(t) \end{cases}$$

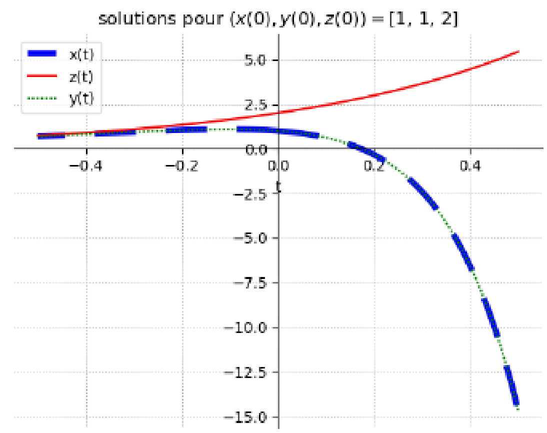
où x, y, z sont trois fonctions inconnues de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On note, pour tout réel t, $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$.

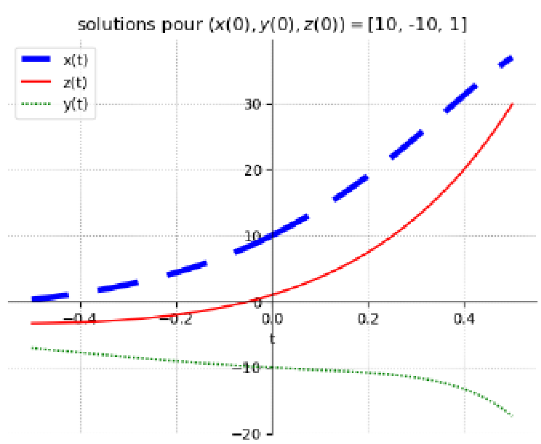
(5) En utilisant le module `scipy.integrate` de Python, on obtient le tracé suivant des solutions du système, en faisant varier $x(0), y(0), z(0)$. Que peut-on conjecturer lorsque $x(0) = y(0)$?

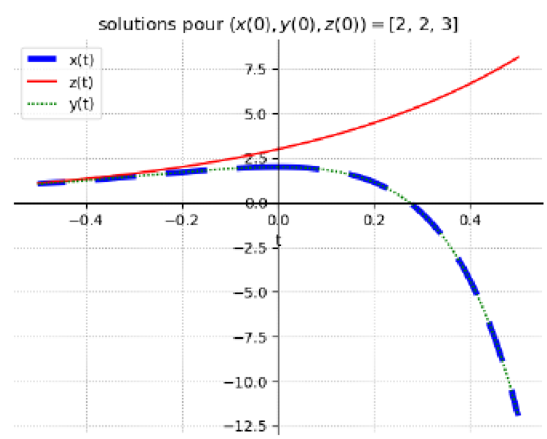












(6) Montrer que, pour tout réel t, $X'(t) = AX(t)$.

(7) On note, pour tout réel t, $Y(t) = P^{-1}X(t)$. On admet que, pour tout réel t, on a $Y'(t) = P^{-1}X'(t)$.
Montrer que, pour tout réel t, $Y'(t) = BY(t)$.

(8) (a) Donner les fonctions φ définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant l'équation différentielle

$$(\mathcal{E}_1) \qquad \varphi'(t) = 6\varphi(t).$$

(b) Donner les fonctions φ définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant l'équation différentielle

$$(\mathcal{E}_2) \qquad \varphi'(t) = 2\varphi(t).$$

(c) Soit $c \in \mathbb{R}$.
Montrer que la fonction $t \mapsto cte^{2t}$ est solution de l'équation différentielle

$$(\mathcal{E}_3) \qquad \varphi'(t) = 2\varphi(t) + ce^{2t}.$$

Déterminer toutes les solutions de $(\mathcal{E}_3)$.

(9) En notant, pour tout réel t, $Y(t) = \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \\ \gamma(t) \end{pmatrix}$, montrer que γ est solution de $(\mathcal{E}_1)$, que β est solution de $(\mathcal{E}_2)$ et α est solution de $(\mathcal{E}_3)$ pour un réel c bien choisi.

(10) Montrer qu'il existe trois réels $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} x(t) & = & 2(\lambda_1 + \lambda_1 t + \lambda_2)e^{2t} + \lambda_3 e^{6t} \\ y(t) & = & 2(\lambda_1 t + \lambda_2)e^{2t} + \lambda_3 e^{6t} \\ z(t) & = & (2\lambda_1 t + \lambda_1 + 2\lambda_2)e^{2t} \end{array} \right.$$

(11) En déduire, en notant $x_0 = x(0), y_0 = y(0), z_0 = z(0)$ que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} x(t) & = & \left((x_0 - y_0)t + z_0 + \dfrac{1}{2}(x_0 - y_0)\right) e^{2t} + \left(\dfrac{1}{2}(x_0 + y_0) - z_0\right) e^{6t} \\ \\ y(t) & = & \left((x_0 - y_0)t + z_0 + \dfrac{1}{2}(y_0 - x_0)\right) e^{2t} + \left(\dfrac{1}{2}(x_0 + y_0) - z_0\right) e^{6t} \\ \\ z(t) & = & ((x_0 - y_0)t + z_0)\, e^{2t} \end{array} \right.$$

(12) Justifier la conjecture faite à la Question 5.