Math ECG 2. 2022-2023

Mathématiques Appliquées - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
ENC Bessières, Paris 17e.

Chapitre 2. Espaces vectoriels de dimension finie.

1 Avant-propos

Ce chapitre nécessite une connaissance et une maitrise totale du chapitre de première année sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$. En particulier, on rappelle que

Résultat du cours de première année

Toute *base* de $\mathbb{R}^n$ est formée d'exactement n vecteurs.

On *généralise* la notion d'*espace vectoriel* (de dimension finie), à un ensemble d'éléments E (matrices, polynômes, ...) muni de certaines opérations en établissant une certaine *correspondance* entre celui-ci et $\mathbb{R}^n$ (pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$). Plus précisément, on considère toujours

- une opération *interne*, toujours notée $+$, d'additions entre éléments de E (additions de matrice, addition de polynômes...);
- une opération *externe*, toujours notée $\cdot$, de multiplication d'un élément de E par un *scalaire* (ou réel).

Ainsi, un espace vectoriel (de dimension finie) est un ensemble muni d'une *structure algébrique* qui permet de faire du calcul et plus particulièrement des *combinaisons linéaires* d'éléments de l'espace.

2 $\mathbb{R}-$Espaces Vectoriels de dimension finie

Définition

Soient E un ensemble non vide muni des deux opérations discutées ci-avant et $n \in \mathbb{N}^*$.

On dit que E est un **espace vectoriel de dimension** n si il existe une bijection Φ de E dans $\mathbb{R}^n$ telle que pour tous éléments $u, v \in E$ et tous réels $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\Phi(\alpha u + \beta v) = \alpha\Phi(u) + \beta\Phi(v).$$

Une telle bijection est dite *linéaire*.

Remarque

La définition précédente signifie que la bijection Φ préserve les combinaisons linéaires.

Naturellement, il n'y a pas unicité de la bijection (lorsqu'elle existe): il y en a une infinité; il suffit d'envoyer une *base* de E sur une *base* de $\mathbb{R}^n$.

☞ Les éléments d'un $\mathbb{R}-$espace vectoriel E sont appelés **vecteurs** (de E). Les éléments de $\mathbb{R}$ sont appelés des **scalaires**.

À retenir!

L'antécédent de $0_{\mathbb{R}^n} = (0, 0, ..., 0)$ par Φ s'appelle le **vecteur nul** de E, il est noté 0_E (ou parfois 0 pour alléger les notation). Attention à bien faire la distinction entre celui-ci et le scalaire (le réel) 0.

Il ne dépend pas de la bijection choisie (c'est nécessairement l'*élément neutre* de la loi interne $+$).

Les propriétés de la bijection Φ et les règles de calculs dans $\mathbb{R}^n$ permettent d'établir celles dans E.

Règle(s) de calcul

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(u, v) \in E^2$.

(1) $0 \cdot u = 0_E$ et $\lambda 0_E = 0_E$

(2) $\lambda u = 0_E \iff (\lambda = 0 \text{ ou } u = 0_E)$

(3) $\lambda(-u) = (-\lambda)u = -\lambda u$

(4) $\lambda(u - v) = \lambda u - \lambda v$

3 Espaces vectoriels de référence

3.1 L'espace $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$

À retenir!

L'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ (muni de l'opération $+$ d'addition de matrices et de l'opération $\cdot$ de multiplication d'une matrice par un scalaire) est un espace vectoriel de dimension np.

Son vecteur nul est la matrice nulle.

On voit par exemple en effet facilement que l'application

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}^{np} \\ (a_{i,j}) & \longmapsto & (a_{1,1}, a_{1,2}, ..., a_{1,p}, a_{2,1}, ..., a_{n,1}, ..., a_{n,p}) \end{array}$$

est bijective et qu'elle préserve bien les combinaisons linéaires.

Exemple

$\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension 4,
$\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension 9.

3.2 L'espace $\mathbb{R}_n[X]$

On rappelle que $\mathbb{R}_n[X]$ désigne l'ensemble des polynômes de degré **inférieur ou égal** à n.

À retenir!

L'ensemble $\mathbb{R}_n[X]$ (muni de l'opération $+$ d'addition de polynômes et de l'opération $\cdot$ de multiplication d'un polynôme par un scalaire) est un espace vectoriel de dimension $n + 1$.

Son vecteur nul est le polynôme nul (fonction polynomiale constante égale à 0).

On voit par exemple en effet facilement que l'application

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \\ a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_1X + a_0 & \longmapsto & (a_0, a_1, ..., a_n) \end{array}$$

est bijective et qu'elle préserve bien les combinaisons linéaires.

Exemple

$\mathbb{R}_0[X]$, ensemble des fonctions constantes, est un espace vectoriel de dimension 1,
$\mathbb{R}_1[X]$ ensemble des fonctions affines, est un espace vectoriel de dimension 2,
$\mathbb{R}_2[X]$ est un espace vectoriel de dimension 3.

3.3 Autres exemples

☞ Le cours de première année établit que l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire (du premier ou deuxième ordre) homogène est un espace vectoriel.

Exemple

Soit $a \in \mathbb{R}$ fixé. On considère l'équation différentielle

$$(E_1) \qquad\qquad y' + ay = 0$$

L'ensemble des solutions de (E_1) (muni de l'addition de fonctions et de la multiplication d'une fonction par un scalaire) est alors un espace vectoriel de dimension 1.

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ fixés tels que le discriminant du polynôme $x^2 + ax + b$ soit positif ou nul. On considère l'équation différentielle

$$(E_2) \qquad\qquad y'' + ay' + by = 0$$

L'ensemble des solutions de (E_2) est alors un espace vectoriel de dimension 2.

En effet, une solution (E_1) est de la forme $t \mapsto \lambda e^{-at}$, on construit de manière très naturelle une bijection linéaire entre l'ensemble des solutions et $\mathbb{R}$ en posant

$$\Phi : \left(t \mapsto \lambda e^{-at}\right) \longmapsto \lambda$$

Pour (E_2), supposons que le discriminant de l'équation caractéristique soit strictement positif avec deux racines α_1 et α_2; une solution est alors de la forme $t \mapsto \lambda e^{-\alpha_1 t} + \mu e^{-\alpha_2 t}$ et dans ce cas on peut construire Φ en posant

$$\Phi : \left(t \mapsto \lambda e^{-\alpha_1 t} + \mu e^{-\alpha_2 t}\right) \longmapsto (\lambda, \mu)$$

On laisse le soin au lecteur de vérifier que les deux applications Φ ci-dessus sont linéaires et bijectives.

☞ On verra dans ce qui suit qu'on peut écrire l'ensemble des solutions avec la notion de *sous-espace engendré* et l'écriture Vect().

4 Combinaisons Linéaires de vecteurs

Définition

Soient $u_1, \dots, u_p$ des vecteurs d'un même espace vectoriel E. On dit qu'un vecteur $v \in E$ est une **combinaison linéaire** des vecteurs $u_1, \dots, u_p$ lorsqu'on peut trouver des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ tels que

$$v = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p.$$

À retenir!

☞ Pour savoir si un vecteur v est bien une combinaison linéaire de vecteurs $u_1, u_2, \ldots, u_p$ donnés, il suffit de résoudre un certain système linéaire.
Parfois, la décomposition "se voit" mais la résolution donne toujours le résultat si on ne la voit pas.

Exemple

Le vecteur $w = (4,2) \in \mathbb{R}^2$ est-il combinaison linéaire des vecteurs $u = (2,-1)$ et $v = (3,1)$? Si on ne trouve de combinaison linéaire *immédiate* (ou évidente), on résout

$$(4,2) = \lambda(2,-1) + \mu(3,1) \iff \left\{ \begin{array}{rcl} 2\lambda + 3\mu & = & 4 \\ -\lambda + \mu & = & 2 \end{array} \right.$$
$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda & = & -2/5 \\ \mu & = & 8/5 \end{array} \right.$$

Le système a des solutions donc la réponse est oui, et on peut écrire

$$w = -\frac{2}{5}u + \frac{8}{5}v.$$

Exercice 1. Dans chaque cas, le vecteur w est-il combinaison des vecteurs u et v?

(1) Dans $\mathbb{R}^3$, $w = (1,2,1)$, $u = (2,1,2)$ et $v = (1,1,2)$.
(2) Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$,

$$w = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad v = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

(3) Dans $\mathbb{R}_3[X]$, $w = X^2 + 1$, $u = X^3 - X$ et $v = 2X$.

À retenir!

☞ Plutôt que dire qu'un vecteur v est combinaison linéaire d'un seul vecteur u, on dira plutôt que u et v sont **colinéaires**.
☞ Le vecteur nul est colinéaire à n'importe quel vecteur (pour tout $u \in E$, $0_E = 0 \cdot u$).

☠ Attention, la notion de colinéarité n'a aucun sens dès lors qu'on parle d'un nombre de vecteurs strictement supérieur à 2.

5 Familles de vecteurs

☞ Une **famille de** n **vecteurs** de E est un $n-$uplet $(u_1, u_2, ..., u_n)$ où chaque u_i est un vecteur de E. En permutant l'ordre des vecteurs d'une famille de vecteurs, on a donc une autre famille de vecteurs. Comme on le verra avec la notion de *base* ci-après, l'ordre des vecteurs dans une famille est important.

Définition

Soit $(u_1, u_2, ..., u_k)$ une famille de k vecteurs d'un espace vectoriel E de dimension n. L'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs de cette famille est noté

$$\mathrm{Vect}(u_1, u_2, ..., u_k) = \{v \in E \ : \ v = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + ... + \lambda_k u_k, \ \lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{R}\}.$$

Exercice 2. Écrire les ensembles suivants sous forme d'un Vect().

(1) $A = \{(x, y, -2x+y) \ : \ (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$;
(2) $B = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \left\{ \begin{array}{rcl} x+y+z & = & 0 \\ x+2y & = & 0 \end{array} \right. \right\}$

Propriété

Soit $(u_1, u_2, ..., u_k)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E.

(1) Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ sont des réels **non nuls**, alors :
$$\text{Vect}(u_1, \cdots, u_k) = \text{Vect}(\lambda_1 u_2, \ldots, \lambda_k u_k);$$
(2) Si u_k est combinaison linéaire de $(u_1 \cdots, u_{k-1})$, alors
$$\text{Vect}(u_1, \cdots, u_{k-1}, u_k) = \text{Vect}(u_1, \cdots, u_{k-1});$$
☞ En particulier, si $u_k = 0_E$, alors :
$$\text{Vect}(u_1, \cdots, u_{k-1}, 0_E) = \text{Vect}(u_1, \cdots, u_{k-1}).$$
(3) Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ sont des réels **avec** $\boldsymbol{\lambda_1 \neq 0}$ alors :
$$\text{Vect}(u_1, u_2, ..., u_k) = \text{Vect}\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i, u_2, \ldots, u_k\right).$$

☞ Ainsi, dans un Vect(), on peut supprimer les vecteurs qui sont combinaisons linéaires des autres, on peut remplacer un vecteur par un multiple non nul de celui-ci, ou par une combinaison linéaire des autres vecteurs dès lors qu'on ne supprime pas la *contribution* du vecteur remplacé.

Exemple

On peut montrer que, dans $\mathbb{R}_1[X]$,
$$\text{Vect}(X-1, X+1, 2X+2) = \text{Vect}(1, X).$$

Exercice 3.

(1) Montrer que : $\text{Vect}\big((4,0,-2);\ (1,2,-1);\ (-3;2;1)\big) = \text{Vect}\big((2,0,-1);\ (1,2,-1)\big)$.
(2) Soit (e_1, e_2, e_3, e_4) une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E.
Montrer que : $\text{Vect}\big(e_1+e_2+e_3+e_4;\ e_2+e_3;\ 2e_2+2e_3\big) = \text{Vect}\big(e_1+e_4;\ e_2+e_3\big)$.

5.1 Familles libres

Définition

Une famille $(u_1, u_2, ..., u_k)$ de vecteurs de E est dite **libre** si la seule *liaison* entre les vecteurs est celle dont tous les coefficients sont nuls. Plus précisément, $(u_1, u_2, ..., u_k)$ est libre si et seulement si
$$(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + ... + \lambda_k u_k = 0_E) \Longleftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_k = 0.$$

☞ Une famille qui n'est pas libre est dite **liée**.
☞ Lorsqu'une famille est libre, on dit aussi que ses vecteurs sont **linéairement indépendants**.

À retenir!

☞ Si un des vecteurs de la famille est combinaison linéaire des autres, alors la famille est liée.

☞ Toute famille contenant le vecteur nul est liée.

☞ Une famille ne contenant qu'un seul vecteur est libre si et seulement si ce vecteur est non nul.

☞ Si la famille ne contient que deux vecteurs (**et seulement dans ce cas**), la famille est libre si et seulement si les deux vecteurs ne sont pas colinéaires.

☠ Attention, ce n'est pas parce que des vecteurs sont deux à deux non colinéaires que la famille est libre. Par exemple, on voit facilement, dans $\mathbb{R}^2$, que la famille $((1,0);(0,1);(1,1))$ est liée.

Exercice 4.

(1) Montrer que la famille $((1,3,-3),(4,2,-3),(-2,7,-6))$ est libre dans $\mathbb{R}^3$.
(2) La famille $(1+X+X^2,\ 3+X+5X^2,\ 2+X+3X^2)$ est-elle libre ou liée dans $\mathbb{R}[X]$?
(3) La famille (J,J^2) est-elle libre ou liée dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, où $J=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$.

Propriété

Soit $(u_1,u_2,...,u_n)$ une famille libre d'un espace vectoriel E. Alors,

(1) La famille obtenue en changeant l'ordre des vecteurs de la famille initiale reste libre;
(2) La famille obtenue en retirant un des vecteurs de la famille initiale reste libre;
(3) La famille obtenue en remplaçant un des vecteurs par un multiple **non nul** de celui-ci reste libre.
(4) Si v n'est pas combinaison linéaire des vecteurs de la famille (en particulier $v\neq 0_E$), la famille obtenue en rajoutant le vecteur v à la famille initiale reste libre.

Hors Programme mais...

Soit $(P_1,P_2,...,P_k)$ une famille de polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ à *degrés echelonnés*, c'est à dire telle que

$$\deg P_1<\deg P_2<...<\deg P_k.$$

Alors, la famille est libre.

☞ Le système qui découle de l'équation de liaison est lui même échelonné, homogène et de Cramer. Sa résolution est immédiate. Mais naturellement, il faudra systématiquement rédiger toutes les étapes.

Remarque

Si $(u_1,u_2,...,u_k)$ est une famille libre de E, considérant une bijection linéaire Φ entre E et $\mathbb{R}^n$, on peut voir que la famille $(\Phi(u_1),...,\Phi(u_k))$ est une famille libre de $\mathbb{R}^n$ impliquant en particulier une inégalité entre k et n:

$$[(u_1,...,u_k)\text{ libre dans } E \text{ avec } \dim(E)=n]\Longrightarrow k\leq n.$$

À retenir!

Une famille qui a "trop" de vecteurs (un nombre strictement supérieur à la dimension de l'espace) ne peut donc pas être libre.

5.2 Familles génératrices (de E)

Définition

Soient E un $\mathbb{R}-$ espace vectoriel (de dimension n) et $\mathcal{F} = (u_1, u_2, ..., u_k)$ une famille de vecteurs de E. On dit que $\mathcal{F}$ est une **famille génératrice de** E si et seulement si

$$E = \text{Vect}(u_1, u_2, ..., u_k).$$

À retenir!

☞ Dire que la famille $\mathcal{F}$ est génératrice de E revient à dire que la famille $\mathcal{F}$ **engendre** l'espace vectoriel E. C'est à dire que **tout** vecteur de E s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs de la famille:

$$\forall v \in E, \ \exists \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k \in \mathbb{R}, \quad v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i.$$

☞ Tout espace vectoriel admet **une infinité** de familles génératrices.

☞ Afin de déterminer si une famille $(u_1, ..., u_n)$ est génératrice de E, on prend un vecteur v **quelconque** de F et on essaie de trouver des coefficients $\lambda_1, ..., \lambda_n$ tels que

$$v = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + ... + \lambda_n u_n.$$

Si (et seulement si) le système correspondant est compatible, alors la famille est bien génératrice de E. Les coefficients obtenus ne sont en revanche pas nécessairement uniques.

Exercice 5.

(1) Montrer que la famille $(1, X, \ldots, X^n)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}_n[X]$.
(2) Montrer que la famille $((1,1); (-1,1))$ est génératrice de $\mathbb{R}^2$.
(3) Montrer que la famille $\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix}\right)$ est génératrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
(4) Montrer que la famille $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$ n'est pas génératrice de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Remarque

Considérant Φ une bijection de E sur $\mathbb{R}^n$. On montre facilement que $(u_1, u_2, ..., u_k)$ est une famille génératrice de E si et seulement si la famille $(\Phi(u_1), ..., \Phi(u_k))$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^n$. Il suit donc que

$$[(u_1, ..., u_k) \text{ génératrice de } E \text{ avec } \dim(E) = n] \Longrightarrow k \geq n.$$

À retenir!

Une famille qui n'a "pas assez" de vecteurs (un nombre strictement inférieur à la dimension de l'espace) ne peut donc pas être génératrice de E.

Propriété

Soit $(u_1, u_2, ..., u_n)$ une famille génératrice d'un espace vectoriel E. Alors,

(1) La famille obtenue en changeant l'ordre des vecteurs de la famille initiale est génératrice de E;
(2) Pour tout $v \in E$, la famille $(u_1, u_2, ..., u_n, v)$ est encore génératrice de E;
(3) Si il existe $i \in [\![1;n]\!]$ tel que u_i est combinaison linéaire des u_j $(j \neq i)$, alors la famille $(u_1, ..., u_{i-1}, u_{i+1}, ..., u_n)$ reste génératrice de E.

À retenir!

☞ Le dernier point de la propriété ci-dessus permet de construire une famille génératrice de cardinal minimal en "supprimant" les vecteurs de la famille qui sont combinaison linéaire des autres.

5.3 Bases de E

Définition

Soit E un espace vectoriel de dimension n. La famille $(u_1, u_2, ..., u_n)$ de vecteurs de E forme une **base** de E si et seulement si tout vecteur de E se décompose de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs u_i:

$$\forall\, v \in E,\ \exists!\ (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n, \quad v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i.$$

De manière équivalente, la famille forme une base de E si et seulement si elle est à la fois **libre et génératrice** de E.

On appelle alors le $n-$uplet $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ les **coordonnées** de v dans la base $(u_1, u_2, ..., u_n)$.

Exercice 6. Montrer que les familles $\mathcal{F}$ ci-dessous forment des bases des espaces vectoriels E précisés.

(1) $\mathcal{F} = ((1,0,0);\ (1,1,0);\ (1,1,1))$ dans $E = \mathbb{R}^3$.
(2) $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$ dans $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

À retenir!

Pour chacun des espaces vectoriels usuels suivants, la famille de vecteurs notée ici $\mathcal{B}$ forme une base, appelée **base canonique** de l'espace.

(1) **Base canonique de $\mathbb{R}^n$.** $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$, où

$$e_1 = (1,0,...,0), \qquad e_2 = (0,1,0,...,0), \qquad \dots, \qquad e_n = (0,0,...,0,1).$$

(2) **Base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.** $\mathcal{B} = (E_{1,1}, E_{1,2}, ..., E_{1,n}, E_{2,1}, ..., E_{n,n})$, où

$$E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \qquad E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad ..., \quad E_{n,n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

(3) **Base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.** $\mathcal{B} = (1, X, X^2, ..., X^n)$.

☞ Ces bases sont dites **canoniques** dans le sens où elles apparaissent comme des bases *naturelles* de l'espace vectoriel considéré: les coordonnées d'un vecteur dans la base canonique ne sont autres que les *composantes* (ou paramètres) de ce vecteur. Par exemple,

- Dans $\mathbb{R}^3$,
$$(x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1) = xe_1 + ye_2 + ze_3.$$
- Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$,
$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = xE_{1,1} + yE_{1,2} + zE_{2,1} + tE_{2,2}$$

Propriété

Un espace vectoriel (de dimension n) admet une infinité de bases.
Toutes ces bases ont le même cardinal : elles sont toutes formées de n vecteurs.

Propriété

Soit $\mathcal{F} = (u_1, u_2, ..., u_k)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E de dimension n. Si $k = n$, alors
$$\mathcal{F} \text{ est une base de E} \iff \mathcal{F} \text{ est libre} \iff \mathcal{F} \text{ est génératrice de E.}$$

☞ Ce résultat est **très pratique**. Lorsque la dimension de l'espace est connue, on choisit en général de montrer seulement le caractère libre ou générateur pour montrer qu'une famille forme une base au lieu d'avoir à vérifier les deux!

Exercice 7.

(1) Montrer que la famille (v_1, v_2, v_3) forme une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, où
$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(2) Montrer que la famille $(1, X - 1, X^2 - 1)$ forme une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

6 Sous-espaces vectoriels

Considérant une famille $(u_1, ..., u_k)$ de vecteurs de E, si celle-ci est libre, l'application
$$\begin{array}{rccc} \Psi : & \mathrm{Vect}(u_1, ..., u_k) & \longrightarrow & \mathbb{R}^k \\ & \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i & \longmapsto & (\lambda_1, ..., \lambda_k) \end{array}$$
est clairement bijective et linéaire. Ainsi, $\mathrm{Vect}(u_1, ..., u_k)$ est un espace vectoriel de dimension k.

Si la famille n'est pas libre, l'application ci-dessus n'est plus bijective. Dans ce cas, on peut extraire une *sous-famille* $(u_{n_1}, ..., u_{n_p})$ (avec $n_p \leq k$) qui soit libre et telle que
$$F = \mathrm{Vect}(u_1, ..., u_k) = \mathrm{Vect}(u_{n_1}, ..., u_{n_p})$$
de sorte qu'on peut ensuite construire une bijection linéaire Ψ entre F et $\mathbb{R}^{n_p}$. Ceci permet d'énoncer le résultat suivant.

Propriété

Soit $(u_1, u_2, ..., u_k)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E, de dimension n. Alors, l'ensemble

$$F = \text{Vect}(u_1, ..., u_k)$$

est un espace vectoriel. Comme c'est un sous-ensemble de E, on dit que c'est un sous-espace vectoriel de E; on l'appelle le **sous-espace vectoriel engendré** par la famille $(u_1, u_2, ..., u_k)$.

F admet une infinité de bases, qui ont toutes le même cardinal, qui correspond à la dimension de F. Cette dimension s'appelle aussi le **rang** de la famille $(u_1, ..., u_k)$: c'est le cardinal de toute famille libre qui engendre le même espace. C'est aussi la taille "optimale" d'une sous-famille libre qui reste génératrice.

À retenir!

☞ Une famille $(u_1, ..., u_k)$ libre est naturellement de rang k. Elle forme une base du sous-espace qu'elle engendre.

Exercice 8. Déterminer le rang de la famille $\mathcal{F}$ de vecteurs de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ci-dessous

$$\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

Définition

Un sous-ensemble F d'un espace vectoriel E est appelé **sous-espace vectoriel de** E, s'il peut s'écrire comme sous-espace vectoriel engendré par une certaine famille de vecteurs de E.

Une famille $(u_1, ..., u_k)$ de vecteurs de E est dite **génératrice de** F si on peut écrire

$$F = \text{Vect}(u_1, ..., u_k).$$

Une famille $(v_1, ..., v_p)$ de vecteurs de E est appelée **base de** F si elle est à la fois libre (dans E) et génératrice de F. Toutes les bases de F ont le même cardinal, ce nombre s'appelle la **dimension** de F.

Exercice 9. (Extrait de **ECRICOME 2009**) Montrer que l'ensemble E ci-dessous est un espace vectoriel, où

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} a & a & a \\ 0 & b & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \; : \; (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

À retenir!

Lorsqu'on demande de trouver la dimension d'un sous-espace, il faut s'assurer d'abord que la famille génératrice exhibée est bien libre.

Propriété

Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors

$$\dim(F) \leq \dim(E).$$

De plus,

$$(F \subset E \text{ et } \dim(E) = \dim(F)) \Longrightarrow E = F$$

Exercice 10. Montrer que les sous-ensemble suivant sont bien des sous-espaces vectoriels, donner une base et préciser leur dimension.

(1) $F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \quad x - 2y + z = 0\right\}$.
(2) $G = \left\{P \in \mathbb{R}_2[X] : \ P(1) = P(0) = 0\right\}$.
(3) $H = \left\{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) : \ {}^tM = M\right\}$.

Propriété

Soit E un espace vectoriel. Les sous-espaces vectoriels de E sont exactement les parties F de E telles que les trois conditions suivantes sont vérifiées

(i) F est **non vide**;
(ii) F est **stable par addition**: pour tous $u, v \in F$, $u + v \in F$;
(iii) F est **stable par multiplication par un scalaire**: pour tout $u \in F$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda u \in F$.

À retenir!

On peut donc montrer qu'une partie non vide F d'un espace vectoriel E est un (sous-) espace vectoriel en montrant qu'elle est **stable** par combinaison linéaire

$$\forall u, v \in F, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \qquad \lambda u + \mu v \in F.$$

☞ En trouvant un contre-exemple à cette stabilité, on montre donc que le sous-ensemble n'est pas un sous-espace vectoriel.

Une question de la session 2022

Les questions suivantes proviennent du sujet **ECRICOME** (Exercice 1, Partie 1, Questions 1 et 2).
Soit F le sous-ensemble de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ constitué des matrices M de la forme

$$M = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$$

où a, b sont des réels.
Soit G le sous-ensemble de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ constitué des matrices M vérifiant $M^2 = M$.

(1) F est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? Si oui, déterminer une base de F et sa dimension.
(2) G est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? Si oui, déterminer une base de G et sa dimension.

7 Sélection d'exercices - Travaux dirigés

Exercice 201. Les familles suivantes sont-elles libres ou liées? Préciser leur rang.

(1) $((4, -16, 10); (4, -5, 3))$ dans $\mathbb{R}^3$.
(2) $((-1, 0, 1); (1, -1, 1); (0, 1, 2))$ dans $\mathbb{R}^3$.
(3) $((1, 1, 1, 1); (1, 2, 3, 4); (1, 2, 8, 16))$ dans $\mathbb{R}^4$.
(4) $((2, 2, 2); (0, 1, 1); (1, 1, 0); (1, 1, 1))$ dans $\mathbb{R}^3$.
(5) $(X^2;\ X^2 + X + 1)$ dans $\mathbb{R}_2[X]$.
(6) $(X^2;\ X^2 - X;\ X^2 + X)$ dans $\mathbb{R}_3[X]$.
(7) $(X^2, X(X - 2);\ (X - 2)^2)$ dans $\mathbb{R}_2[X]$.
(8) $\left(\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}\right)$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
(9) $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}\right)$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 202. Montrer l'égalité des ensembles F et G définis ci-dessous

$$F = \text{Vect}\left((1,1,0);(1,2,1)\right), \quad \text{et} \quad G = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x+y-z=0\right\}.$$

Exercice 203. On considère les trois polynômes

$$P_0(X) = (X+1)(X-1), \quad P_1(X) = (X-2)(X+1), \quad \text{et} \quad P_2(X) = (X-1)(X-2).$$

(1) Montrer que la famille (P_0, P_1, P_2) est libre.
(2) En déduire que celle-ci forme une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Préciser alors les coordonnées de X dans cette base.

Exercice 204. (Extrait de **DM n°2**, Automne 2021) Montrer que la famille (u,v,w) est une base de $\mathbb{R}^3$, où

$$u = (-1,2,0), \quad v = (3,-5,-1), \quad w = (0,1,-2).$$

Expliciter les coordonnées d'un vecteur (x,y,z) dans cette nouvelle base.

Exercice 205. Justifier que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels en déterminant une famille génératrice.

$$A = \left\{(x-y, x+y, 2x-3y),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\}; \quad B = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+2y-3z=0\right\};$$

$$C = \left\{P = aX^2 + (b-2a)X + a - b + c,\ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\right\}; \quad D = \left\{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(0) = P(1) = 0\right\}.$$

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \ : \ \begin{cases} -x+2y = y+6z \\ y+3z = -2x \end{cases} \right\}; \quad F = \left\{ \begin{pmatrix} x+z & 2x-y & z \\ y-x & z+2y & x+z \\ 0 & 2x & x-z \end{pmatrix},\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

Exercice 206. On considère le sous-ensemble H de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par

$$H = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \ a+d=0 \right\}.$$

Montrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Expliciter une base de H et préciser sa dimension.

Exercice 207. On introduit les fonctions (définies sur $\mathbb{R}$)

$$f_1 : \ t \mapsto e^{-t}, \qquad f_2 : \ t \mapsto e^{-2t}, \qquad g_1 : \ t \mapsto te^{-t}, \qquad g_2 : \ t \mapsto te^{-2t}$$

et on considère les espaces vectoriels

$$E = \text{Vect}(f_1, f_2, g_1, g_2), \quad F_1 = \text{Vect}(f_1, f_2), \quad F_2 = \text{Vect}(f_1, g_1), \quad \text{et} \quad F_3 = \text{Vect}(f_2, g_2).$$

(1) Montrer que la famille (f_1, f_2, g_1, g_2) est libre.
(2) Quelles sont alors les dimensions des quatre espaces vectoriels ci-dessous? De quelles équations différentielles linéaires sont-ils les ensembles de solutions?

Exercice 208. On considère la matrice A est donnée par $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

(1) Déterminer trois vecteurs $U, V, W \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tels que

$$\{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) : \ AX = 0\} = \text{Vect}(U), \qquad \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) : \ AX = X\} = \text{Vect}(V),$$

et

$$\{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) : \ AX = 4X\} = \text{Vect}(W).$$

(2) En déduire que les trois ensembles précédents sont des (sous-)espaces vectoriels (de $\mathcal{M}_{3,1}$) et préciser leurs dimensions.
(3) La famille (U, V, W) est-elle libre ? Forme-t-elle une base de $\mathcal{M}_{3,1}$?

Exercice 209. Soient a, b et c des réels. On considère les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivantes:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\mathcal{F} = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a+c & b \\ c & b & a \end{pmatrix} : \ a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

(1) Montrer que $\mathcal{F}$ est un espace vectoriel.
(2) Exprimer A^2 comme combinaison linéaire de I, A et J puis montrer que : $\mathcal{F} = \mathrm{Vect}\,(I, A, A^2)$.
(3) La famille (I, A, A^2) est-elle libre ?

Exercice 210. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $F = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) : \ AM = MA\}$.

(1) Montrer que F est un espace vectoriel.
(2) Déterminer une base $\mathcal{B}$ de F ainsi que la dimension de F.
(3) (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n \in F$.
  (b) Après avoir vérifié que la famille ci-dessous formait une base de F, déterminer les coordonnées de A^n dans celle-ci.

$$\left(I, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

(4) Soit $G = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) : \ {}^tAM = M^tA\}$.
  (a) Montrer que $M \in G \Leftrightarrow {}^tM \in F$.
  (b) En déduire une base de G ainsi que sa dimension.

Exercice 211. (*) Pour $0 \le k \le n$, on note $P_k(X) = X^k(1-X)^{n-k}$. Le but de l'exercice est de démontrer que la famille $(P_0, ..., P_n)$ forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

(1) Quel est le terme de plus bas degré de P_k ?
(2) On suppose que la famille $(P_0, P_1, ..., P_n)$ est liée.
  (a) Justifier qu'il existe $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ tel que

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i P_i(X) = 0.$$

  (b) Justifier que l'ensemble $A = \{k \in [\![0; n]\!] : \ \lambda_k \neq 0\}$ défini ci-dessous est non vide,
  (c) On pose alors $k_0 = \min\{k \in A\}$. Quel est le terme de degré k_0 dans $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \lambda_i P_i(X)$?
  (d) Conclure.

Exercice 212. (*) On rappelle que $S_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices *symétriques* de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. C'est à dire les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant ${}^tM = M$.

(1) Dans cette question on prend $n = 3$.
  (a) Montrer que $S_3(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel.
  (b) Déterminer une base de cet espace ainsi que sa dimension.
(2) On revient au cas général.
  (a) Montrer que la famille $\mathcal{E} = (E_{i,i})_{1 \le i \le n}$ est une famille libre d'éléments de $S_n(\mathbb{R})$.
  (b) Montrer que la famille $\mathcal{F} = (E_{i,j} + E_{j,i})_{1 \le i < j \le n}$ est une famille libre d'éléments de $S_n(\mathbb{R})$.
  (c) Montrer que la famille obtenue par *concaténation* des familles $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ est encore libre et qu'elle forme une base de $S_n(\mathbb{R})$. En déduire la dimension de $S_n(\mathbb{R})$.