Mathématiques Appliquées - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
ENC Bessières, Paris 17e.

Chapitre 3. Suites récurrentes et implicites

1 Avant-propos

Contrairement aux suites classiques (arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques, récurrentes linéaires d'ordre 2...) pour lesquelles il est capital de savoir déterminer le terme général (on renvoie au cours de première année), l'objet de l'étude d'une telle suite est plutôt de déterminer les variations de la suite et son *comportement asymptotique* (convergence, recherche d'un équivalent...).

Ce cours reprend la marche à suivre classique de l'étude; il permettra de comprendre la structure des problèmes classiques de concours dans lesquelles les étapes peuvent être plus ou moins découpées et sont naturellement **toutes à redémontrer**. Les outils principaux pour la convergence sont les suivants

Résultat du cours de première année

Théorème de convergence monotone. Si (u_n) est une suite croissance majorée (ou décroissance minorée), alors elle converge vers un certain réel ℓ.

Théorème d'encadrement. Si $(u_n), (v_n)$ et (w_n) sont trois suites réelles tells que (à partir d'un certain rang), on ait
$$v_n \leq u_n \leq w_n$$
et que (v_n) et (w_n) sont toutes deux convergentes avec la même limite ℓ, alors (u_n) converge également vers ℓ.

2 Suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$

Définition

Une suite récurrence est une suite (u_n) définie par la donnée de son premier terme u_0 (ou u_1) et une relation de récurrence de la forme
$$u_{n+1} = f(u_n)$$
(où f est une certaine fonction), qui permet, de proche en proche, de calculer tous les termes de la suite.

☞ Dans les problèmes où apparaissent des études de suites récurrentes, l'étude de la fonction f fait quasiment toujours l'objet d'une première partie. On y montre des propriétés (continuité, dérivabilité, monotonie, recherche du point fixe, ...) qui sont bien sûr à utiliser dans la ou les parties qui suivent.

2.1 (Bonne) Définition d'une suite récurrente

Il apparait très vite que le mode de génération des termes d'une suite par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ peut vite poser problème si, *au bout d'un moment*, un des termes générés se trouve en dehors du domaine de définition de f (dans le cas où celui-ci ne serait pas $\mathbb{R}$ tout entier), empêchant ainsi de poursuivre le processus. (On rencontrera ce cas avec la Question 14b du Problème de synthèse (Section 4).)

☞ Souvent, on montre par récurrence que (u_n) est bien définie notamment en montrant simultanément que ses termes se trouvent tous dans un intervalle inclus dans le domaine de définition de f.

Tout se passe bien lorsque l'on travaille sur un intervalle I *stable* sous l'action de f, et qu'on y prend le premier terme de la suite.

À retenir!

☠ On fera donc bien attention, si le cas se présente, à ne pas oublier de montrer que u_n existe dans la récurrence.

Exercice 1. On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 1, \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}.$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et que $u_n > 0$.

2.2 Obtenir un terme de rang quelconque avec Python

Écrire un code Python permettant de renvoyer le terme u_n d'une suite récurrente, où n est entré par l'utilisateur ou en argument de la fonction est une question classique, dont la réponse est facile.

Naturellement, tous les programmes de ce chapitre utilisent les bibliothèques et libraires usuelles

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
def suite_u(n):
    u=....... # initialisation : premier terme de la suite
    for k in range(1, n+1):
        u=f(u) # ou bien f est déjà définie
               # ou bien remplacée directement par son expression
    return u
```

Une alternative serait de demander un programme qui renvoie *la liste* des termes successifs de la suite

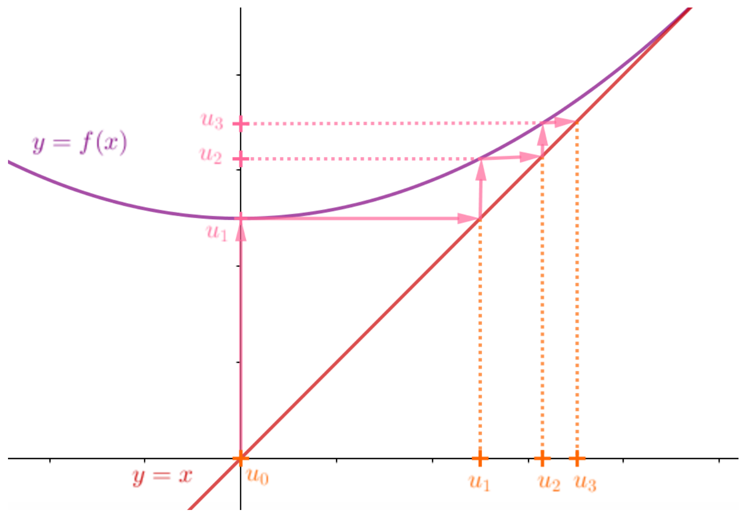
```
def termes_u(n):
    u=np.zeros(n+1)
    u[0]= ...... # initialisation : premier terme de la suite
    for k in range(n):
        u[k+1]=f(u[k])
    return u
```

☞ Un autre type de programme fréquemment demandé est celui visant à calculer et afficher le premier entier n tel que u_n satisfasse une certaine condition (souvent d'écart à la limite). On y revient ci-après.

2.3 Représentation graphique

La figure ci-dessous, propose une représentation *en escalier* de la suite récurrente $u_{n+1} = (u_n^2 + 1)/2$, avec $u_0 = 0$, c'est à dire qu'on voit apparaître le processus de construction *récursif* de chacun des termes de la suite.

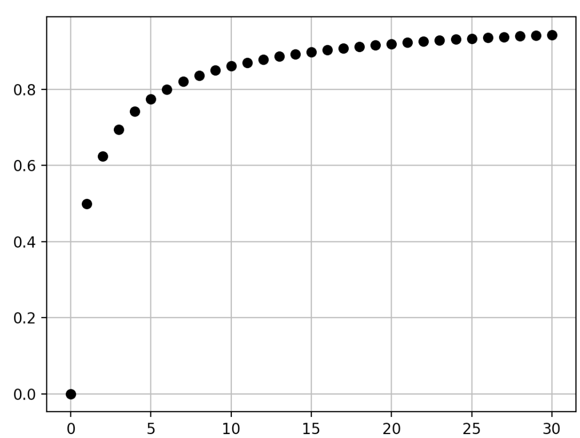
Illustration



☞ Pour représenter la même suite avec Python, on utilise la commande `plt.plot( )`. Plus précisément, on peut utiliser le code

```
def suite_u(n):
    u= 0
    for k in range(1, n+1):
        u=(u**2+1)/2
    return u
stop=30 # rang du dernier terme représenté
U=[suite_u(k) for k in range(stop+1)]
N=[k for k in range(stop+1)]
plt.grid() # plus pratique pour la lecture
plt.plot(N, U, 'ko')
plt.show()
```

Affichage Python



2.4 Variations d'une suite récurrente

À retenir!

☠ ☠ ☠ Il devient, à ce stade, passible de la peine capitale d'écrire que la suite (u_n) suit les mêmes variations que la fonction f.

Une fonction f croissante peut générer une suite (u_n) décroissante !!

☞ Une fonction f croissante (sur l'intervalle où vivent les termes) va permettre de générer une suite **monotone** mais qui peut être décroissante.

☞ L'étude de la monotonie peut se faire par deux méthodes.
Dans certains exercices, on aura le choix mais le plus souvent c'est l'énoncé du sujet qui guide *via* les questions posées.

À connaître sur le bout des doigts

✏ **<u>Méthode 1</u>:** Par récurrence avec la croissance de f.

Cette méthode nécessite d'être en mesure de calculer les deux premiers termes de la suite, ce qui n'est pas toujours le cas si par exemple u_0 est donné arbitraire dans un certain intervalle.

Soient (u_n) une suite récurrente, $u_{n+1} = f(u_n)$, avec f croissante sur I et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$. Alors,

(i) Si $u_0 \leq u_1$, (u_n) est croissante;
(ii) Si $u_0 \geq u_1$, (u_n) est décroissante.

Les conditions (i) ou (ii) permettent d'initialiser la récurrence, dont l'hérédité est triviale du fait de la croissance de f qui préserve les inégalités de l'hypothèse de récurrence.

Exercice 2. On continue avec (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + 1}{2}$.

(1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0; 1]$.
(2) Montrer que (u_n) est croissante.

Remarque

☞ Si la fonction f est **décroissante** (sur l'intervalle où vivent les termes de la suite) la suite (u_n) **n'est plus monotone**.

On peut en revanche montrer par la même méthode (une récurrence) que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) le sont. En comparant u_0 et u_2 pour la première, et u_1 et u_3 pour la seconde, on a le sens de chacune. Ceci repose sur l'observation que $g = f \circ f$ est dans ce cas croissante et que $u_{2(n+1)} = g(u_{2n})$.

$$\begin{tikzcd} u_n \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[rr, bend right, "f \circ f = g"'] & u_{n+1} \arrow[r, bend left, "f"] & u_{n+2} \end{tikzcd}$$

Exercice 3. Soit (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = 1 + \dfrac{2}{x}$.

(1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et que $u_n \in [1;3]$.
(2) Calculer u_1, u_2, u_3. La suite (u_n) est-elle monotone?
(3) Montrer que (u_{2n}) est croissante et que (u_{2n+1}) est décroissante.
On pourra montrer que $u_{2(n+1)} = g(u_{2n})$, où $g = f \circ f$ est croissante.

À connaître sur le bout des doigts

✏ **<u>Méthode 2</u>:** Avec le signe de $f(x) - x$.

Observant que $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$, connaître le signe de $f(x) - x$ permet tout de suite, (en évaluant donc en $x = u_n$) de connaître les variations de la suite, si bien sûr on sait que **tous les termes de la suite de situent dans un intervalle où le signe de $f(x) - x$ est constant**.

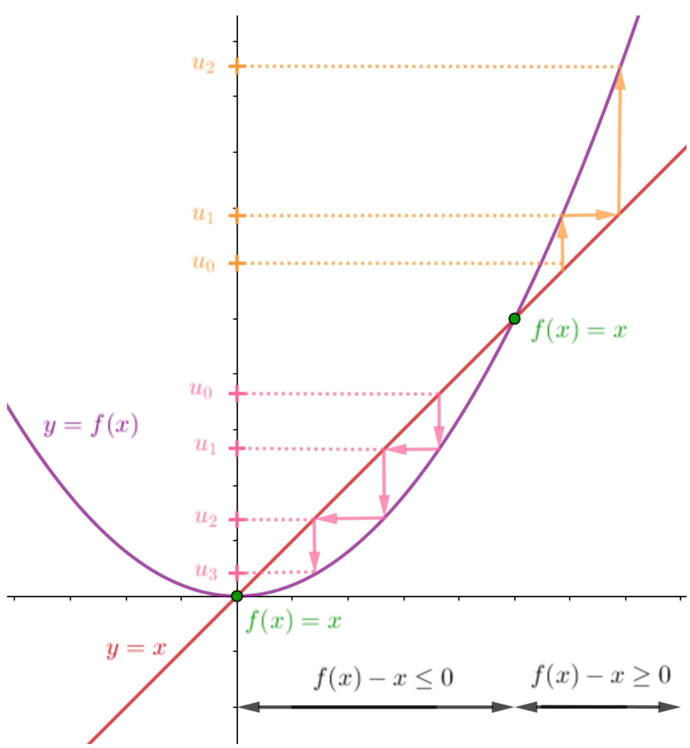
Plus précisément, on a le résultat suivant, dont la preuve est immédiate.
Soit (u_n) une suite définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Alors,
(i) Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$ et si $f(x) - x \geq 0$ pour $x \in I$, alors (u_n) est croissante.
(ii) Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$ et si $f(x) - x \leq 0$ pour $x \in I$, alors (u_n) est décroissante.

☞ On insiste sur la nécessité de la validité des inégalités là où se trouvent **tous** les termes de la suite.

☞ Si le signe de $f(x) - x$ varie, c'est la position de u_0 par rapport au(x) *point(s) fixe(s)* qui détermine le sens de variation de (u_n).

Illustration

Une même fonction f croissante (ici sur $\mathbb{R}_+$) peut générer, selon le premier terme u_0, une suite (u_n) croissante ou décroissante.



2.5 Point fixe: candidat éventuel pour une limite finie

☞ En déterminant le signe de $f(x) - x$ dans la méthode précédente, on résout notamment l'équation de point fixe $f(x) = x$, dont les solutions donnent les *candidats* pour une limite finie **éventuelle**.

À retenir!

☠ L'existence des points fixes de f ne garantit en aucun cas la convergence de la suite (u_n), il faut un argument supplémentaire (bien souvent le *théorème de convergence monotone*) pour montrer la convergence et ensuite choisir le *bon point fixe* comme valeur pour cette limite.

À retenir!

Soit (u_n) une suite récurrente définie par $u_{n+1} = f(u_n)$. Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$, si f est **continue** sur I, **et si** (u_n) est convergente, alors sa limite ℓ est un point fixe de I.

$$\begin{array}{ccc} u_{n+1} & = & f(u_n) \\ \downarrow & {\scriptstyle n\to+\infty} & \downarrow \\ \ell & = & f(\ell) \end{array}$$

☞ Il est capital que la fonction f soit continue sur tout l'intervalle **fermé** pour pouvoir passer à la limite dans la relation de récurrence (ce qui explique qu'on étudie avec intérêt la régularité de la fonction).

☞ Si les seuls points fixes de f sont à l'extérieur de l'intervalle où vivent les termes de la suite (voire s'il n'y a pas de point fixe), on peut alors conclure (par un raisonnement par l'absurde) que la suite diverge!

2.6 Critère de convergence: convergence monotone

À connaître sur le bout des doigts

Théorème de convergence monotone. Soit (u_n) une suite. Alors,

(i) Si (u_n) est croissante et majorée, elle est convergente.
(ii) Si (u_n) est croissante et non majorée, elle diverge vers $+\infty$.
(iii) Si (u_n) est décroissante et minorée, elle est convergente.
(iv) Si (u_n) est décroissante et non minorée, elle diverge vers $-\infty$.

À retenir!

☠ Attention la convergence monotone ne donne pas la valeur de limite qui n'est souvent pas le majorant (ou le minorant) qu'on a utilisé. On évitera les conclusions hâtives.

Remarque

☞ On utilise aussi ce théorème pour des démonstrations par l'absurde.
En effet, il est difficile de montrer par exemple qu'une suite n'est pas majorée. Ce qu'on fait donc est qu'on suppose qu'elle l'est, lorsqu'on sait que la suite est croissante, pour déduire la convergence et aboutir à une contradiction (par exemple s'il n'y a pas de point fixe dans l'intervalle où vivent les termes de la suite).

Exercice 4. Montrer que la suite de l'Exercice 2 converge vers une limite ℓ à préciser.

☞ Dans le cas où f est décroissante, on peut être amené à appliquer le théorème de convergence monotone aux suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}). Si celles-ci convergent vers une même limite, alors il en est de même pour (u_n).

Exercice 5. Montrer que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) de l'Exercice 3 convergent et préciser leurs limites respectives. Conclure.

2.7 Utilisation de l'IAF

Commençons par un petit rappel du cours de première année. L'inégalité des accroissements finis (IAF) permet de contrôler les écarts entre les images de deux points par une fonction f *régulière* par l'écart initial entre les deux points affecté d'un coefficient qui n'est autre que l'accroissement maximal de la // fonction sur l'intervalle.

Résultat du cours de première année

Inégalité des accroissements finis. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$sur un intervalle $[a, b]$. Alors, pour tous $x, y \in [a, b]$, on a

$$|f(x) - f(y)| \leq \max_{t\in[a,b]} |f'(t)||x - y|.$$

Ainsi, lorsque la suite n'est pas monotone (mais pas seulement dans ce cas), l'utilisation de l'*inégalité des accroissements finis* (IAF) peut permettre d'obtenir des estimations des **écarts successifs** entre les termes de la suite et le candidat limite (aussi point fixe de f).
Une récurrence permet ensuite d'obtenir un encadrement donnant la conclusion souhaitée (la convergence) par application du théorème des gendarmes.
Cette méthode donne même une indication sur la vitesse de convergence, qui est alors plus rapide qu'une convergence géométrique (ce qui est rapide).

☞ On va appliquer l'IAF à f avec $x = u_n$ et à $y = \ell$ un point fixe de f. Pour que la méthode fonctionne, il faut que connaître l'accroissement maximal **sur l'intervalle où vivent les termes de la suite**.

À connaître sur le bout des doigts

Soient (u_n) une suite définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ et I un intervalle tels que

(i) Pour tout n, $u_n \in I$;
(ii) Il existe $\ell \in I$, tel que $f(\ell) = \ell$;
(iii) f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et, pour tout $x \in I$,

$$|f'(x)| \leq k,$$

où $0 < k < 1$. (*On dit que f est contractante.*)

☞ Alors, (u_n) converge vers ℓ.

En effet, on commence par appliquer l'IAF à f sur I (et il est donc capital de savoir que f est bien $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle où vivent les termes de la suite ainsi que le point fixe candidat) permet d'obtenir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_{n+1} - \ell| = |f(u_n) - f(\ell)| \leq k|u_n - \ell|,$$

Ensuite, une **récurrence** (immédiate) donne l'estimation

$$(\star) \qquad |u_n - \ell| \leq k^n|u_0 - \ell|$$

et le résultat souhaité par théorème d'encadrement.

☞ Il est nécessaire que $0 < k < 1$ pour avoir $k^n \to 0,\ n \to +\infty$.

☞ La relation ($\star$) nous dit en fait que la suite $(|u_n - \ell|)_n$ est *sous-géométrique* de raison k.
C' est aussi la *base* de l'élaboration de programmes Python permettant d'obtenir une valeur approchée de la limite.

À retenir!

En effet, un terme u_n fournira une approximation de ℓ à ε près si $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$.

Il faut donc calculer u_n *jusqu'à* ce que cet écart soit assez petit. Mais comme on en sait pas *a priori* calculer ℓ, on utilise la majoration, et on calcule u_n jusqu'à ce que k^n soit plus petit que ε.

```
def valeur_approchee(erreur):
    u=u0 # terme initial
    n=0
    while majorant**n >= erreur:
        n=n+1
        u=f(u)
    return u
```

Exercice 6. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) = u_n + \frac{1}{4}(2 - u_n^2).$$

(1) Étudier les variations de f et montrer que $f([1;2]) \subset [1;2]$.
(2) Montrer que pour tout entier n, $u_n \in [1;2]$.
(3) Montrer que si (u_n) converge vers ℓ, alors $\ell = \sqrt{2}$.
(4) Montrer que pour tout $t \in [1;2]$, $\quad |f'(t)| \leqslant \frac{1}{2}$.
(5) Montrer que pour tout entier n dans $\mathbb{N}$

$$|u_{n+1} - \sqrt{2}| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \sqrt{2}|,$$

puis que :

$$|u_n - \sqrt{2}| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

(6) En déduire la convergence de la suite (u_n).
(7) Écrire alors un programme en Python permettant d'obtenir une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-5} près.

3 Suites implicites

Définition

Une suite implicite (x_n) est une suite définie par une certaine équation (E_n) qui dépend de n. Bien souvent, le terme x_n est l'unique solution de l'équation $f_n(x) = 0$.

☞ En général, c'est le théorème de bijection qui permet de conclure à l'existence des termes de la suite.

Exemple

Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n : \ x \mapsto e^x + x - n$ réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $[1-n, +\infty[$, 0 (qui est bien dans l'intervalle image) admet un unique antécédent par f_n sur $\mathbb{R}_+$, que l'on note x_n.

☞ Comme l'indique son nom, une suite implicite n'est pas explicite. *A priori*, elle ne vérifie pas de relation de récurrence et il n'existe pas d'expression en fonction de n.

☞ Les méthodes de la section précédente ne sont donc pas applicables.

☞ **La seule information** dont on dispose sur la suite (x_n) est qu'elle est solution de l'équation E_n, c'est-à-dire qu'elle vérifie l'équation $f_n(x_n) = 0$. Cette relation permet de déduire de nombreuses propriétés de la suite et on y revient toujours.

☞ En Python, on utilise alors souvent un programme permettant d'obtenir une valeur approchée de x_n par **dichotomie**. Prenons l'exemple d'une fonction f_n strictement croissante qui s'annule entre a et b. Le programme suivant renvoie une valeur approchée de x_n à 10^{-3} près.

```
def va_x(n):
    a= ...
    b= ... # on sait que la solution x_n est entre a et b
    c=(a+b)/2 # milieu de l'intervalle
    while b-a > 10**(-3) : # ou autre degré de précision
        if f(n,a)*f(n,c) >0: # si la solution est entre c et b
           a=c # on décale à droite
        else :
            b=c # on décale à gauche
        c=(a+b)/2
   return c
```

À retenir!

☞ L'équation $f_n(x_n) = 0$ vérifiée par la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est valable pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Ainsi, on peut également écrire

$$f_{n+1}(x_{n+1}) = 0, \qquad \text{ou} \qquad f_{n-1}(x_{n-1}) = 0.$$

☠ En revanche, on ne connait au départ rien sur

$$f_n(x_{n+1}) \qquad \text{ou} \qquad f_{n+1}(x_n)$$

et c'est justement l'estimation de ces quantités qui donne souvent le sens de variations de la suite (x_n).

3.1 Existence de la suite. Encadrement des termes

À retenir!

Pour montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existe, il faut montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution. Pour cela, on utilise le **théorème de la bijection** en précisant les intervalles de départ et d'arrivée.

☞ On doit bien vérifier et mentionner le fait que 0 est dans l'intervalle image, sinon il n'admet pas (d'unique) antécédent!

☞ Il est absolument nécessaire de dresser le tableau de variation de la fonction f_n qui va servir de support à l'étude de la suite implicite (x_n).

☞ On n'oublie pas que le théorème de bijection donne aussi les variations de la bijection réciproque, et cela s'avère parfois pratique et donne des résultats immédiats.

À retenir!

✐ Pour montrer que la suite (x_n) est majorée et/ou minorée, on utilise les variations de la fonction f_n **en raisonnant sur les images** : les antécédents seront rangés dans le même ordre que les images, ou dans l'ordre opposé, selon que f_n est (strictement) croissante ou décroissante.

Exercice 7. (D'après **EDHEC 2000**) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f_n(x) = x^n + 9x^2 - 4.$$

(1) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ n'a qu'une seule solution strictement positive, notée u_n.
(2) Calculer u_1 et u_2 puis vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \in \left]0, \frac{2}{3}\right[$.

3.2 Monotonie de la suite

C'est souvent la partie la plus délicate de l'étude. L'enoncé va normalement guider cette étape, mais l'idée générale est la suivante.

À retenir!

✐ Pour étudier la monotonie de la suite (x_n), il faut comparer x_n et x_{n+1}, ce qu'on ne peut pas faire directement. On va donc comparer $f_n(x_n)$ et $f_n(x_{n+1})$ (il s'agit de deux images par la **même** fonction f_n). Si on sait que $f_n(x_n) = 0$, il faut alors estimer $f_n(x_{n+1})$.

Une fois que c'est fait, on peut conclure avec le sens de variation de f_n.

Exercice 8. On reprend la suite implicite de l'Exercice 7.

(1) Montrer que, pour tout x élément de $]0, 1[$, on a : $f_{n+1}(x) < f_n(x)$.
(2) En déduire le signe de $f_n(u_{n+1})$, puis les variations de la suite (u_n).

3.3 Convergence de la suite et limite

☞ Comme la suite est implicite, le moyen de prouver la convergence de la suite est d'utiliser le **théorème de convergence monotone**.

Une fois l'existence de la limite établie (notée ℓ), on peut alors passer à la limite dans la relation vérifié par x_n, à savoir $f_n(x_n) = 0$, ce qui donne une équation en ℓ.

☠ Lors du passage à la limite dans la relation $f_n(x_n) = 0$, certaines formes indéterminées subtiles peuvent apparaitre, du type $\lim x_n^n$.
Ce calcul assez délicat fait souvent l'objet d'une question dédiée.

Exercice 9. (Exercice 7, suite et fin).

(1) Montrer que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.
(2) Déterminer la limite de $(u_n)^n$ lorsque n tend vers $+\infty$.
(3) Donner enfin la valeur de ℓ.

4 Un problème de synthèse (sans IAF)

On considère la fonction f définie sur $[0, 1[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1-x)}{\ln(x)}, & \text{si } x \in]0; 1[\\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Partie A : Étude de la fonction f

(1) Montrer que f est continue sur $[0;1[$.

(2) Montrer que f est dérivable en 0 et préciser $f'(0)$.

(3) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[$ et que l'on a, pour tout $x \in]0;1[$,

$$f'(x) = \frac{1}{x\,(1-x)\,(\ln(x))^2}\ (-x\,\ln(x) - (1-x)\,\ln(1-x))$$

(4) (a) Justifier : $\forall t \in\ ]0,1[,\ t\ln(t) < 0$
(b) En déduire que la fonction f est strictement croissante sur $[0,1[$.

(5) Calculer la limite de f en 1. Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de f ?

(6) Tracer l'allure de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé, en faisant figurer la tangente en 0 et les branches infinies éventuelles.

Partie B : Résolution de l'équation $f(x) = x$

On introduit la fonction g définie sur $]0;1[$ par

$$g(x) = \ln(1-x) - x\ln(x).$$

(7) Justifier que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0;1[$ et calculer, pour $x \in]0;1[$, $g'(x)$ et $g''(x)$.

(8) Dresser le tableau de variations de g'. Justifier qu'il existe un unique réel $\beta \in]0;1[$ tel que $g'(\beta) = 0$. En déduire le tableau de signe de $g'(x)$ sur $]0;1[$.

(9) Déduire de la question précédente les variations de g. Expliciter le signe de $g(\beta)$. En déduire qu'il existe un unique réel $\alpha \in]0;1[$ tel que $g(\alpha) = 0$ et qu'en plus $0 < \beta < \alpha < 1$.

(10) Déduire des questions précédentes que l'équation $f(x) = x$ admet exactement deux solutions sur l'intervalle $[0;1[$. Expliciter le tableau de signes de $f(x) - x$ sur ce même intervalle.

Partie C : Étude d'une suite récurrente

On introduit la suite (ω_n) définie par

$$\begin{cases} \omega_0 \in\ ]0;1[, \\ \omega_{n+1} = f(\omega_n) \qquad (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

(12) Que se passe-t-il si on prend $\omega_0 = 0$ ou $\omega_0 = \alpha$?

(13) Dans cette question, on suppose que $\omega_0 \in]0,\alpha[$.

(a) Montrer que (ω_n) est bien définie et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\omega_n \in]0;\alpha[$.
(b) Montrer que (ω_n) est décroissante.
(c) Montrer qu'alors (ω_n) converge vers une limite à préciser.

(14) Dans cette question, on suppose que $\omega_0 \in\ ]\alpha,1[$ et on cherche à montrer que (ω_n) **n'est pas** bien définie.

(a) L'intervalle $]\alpha,1[$ est-il stable par f?

(b) On raisonne dorénavant par l'absurde et on suppose que ω_n est défini pour tout n.
(i) Montrer que la suite (ω_n) est croissante.
(ii) Montrer alors que (ω_n) diverge vers $+\infty$.
(iii) Conclure.

(c) Écrire un programme Python qui calcule et affiche le premier rang n tel que ω_n est bien défini mais ω_{n+1} n'existe pas.

Partie D : Étude d'une suite implicite

On note, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, (E_n) l'équation : $x^n + x - 1 = 0$.

(15) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Étudier les variations sur $\mathbb{R}_+$ de la fonction $h_n :\ x \mapsto x^n + x - 1$.
En déduire que l'équation (E_n) admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$ que l'on note u_n.

(16) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, u_n appartient à l'intervalle $]0, 1[$.

(17) Déterminer u_1 et u_2.

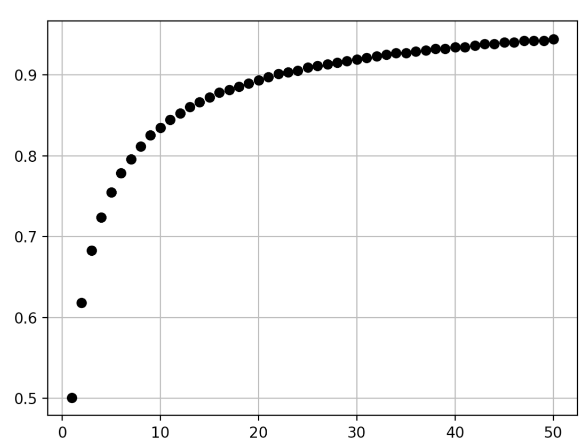
(18) (a) Recopier et compléter la fonction Python suivante afin que, prenant en argument un entier n de $\mathbb{N}^*$, elle renvoie une valeur approchée de u_n à 10^{-3} près, obtenue par dichotomie.

```
def val_ap_u(n):
    a = 0
    b = 1
    while ............... :
        c = (a + b) / 2
        if (c**n+c-1) > 0:
            ...............
        else :
            ...............
    return c
```

(b) On ajoute les commandes suivantes dont l'exécution permet d'afficher la figure ci-dessous. Expliquer à quoi elles correspondent. Quelles conjectures peut-on faire sur la suite (u_n) concernant sa monotonie, sa convergence et son éventuelle limite ?

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
X=[k for k in range(1, 51)]
L=[val_ap_u(k) for k in range(1, 51)]
plt.grid( )
plt.plot(X, L, 'ko')
plt.show( )
```

Affichage Python



(19) Déterminer, pour $x \in]0;1[$, le signe de $h_{n+1}(x) - h_n(x)$. En déduire le sens de variations de (u_n).

(20) (a) Justifier de la convergence de (u_n) vers une limite $\ell \in [0;1]$.
(b) On suppose que $\ell \in [0,1[$. Vérifier que $n\ln(u_n) \to -\infty$ et en déduire la limite de u_n^n. Aboutir à une contradiction puis conclure quant à la limite de (u_n).

(21) (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $f(u_n) = n$. Retrouver alors les résultats précédents concernant la suite (u_n).

5 Sélection d'exercices - Travaux dirigés

Suites récurrentes

Exercice 301. (D'après **EML 1995**). Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = x\ln(1+x)$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in]0;+\infty[$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(1) (a) Montrer que f est C^2 sur $[0;+\infty[$ et calculer, pour tout $x \in [0;+\infty[$, $f'(x)$ et $f''(x)$.
(b) En déduire les variations de f.

(2) (a) Étudier le signe de la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$ sur $\mathbb{R}_+$.
(b) Quelles sont les limites possibles de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

(3) On suppose dans cette question : $u_0 \in]e-1;+\infty[$.
(a) Montrer que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e - 1 < u_n \leq u_{n+1}$.
(b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

(4) On suppose, dans cette question : $u_0 \in]0;e-1[$.
Étudier la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 302. (D'après **EML 2016**) On considère l'application $f : [0;+\infty[\to \mathbb{R}$ définie, pour tout t de $[0;+\infty[$, par :

$$f(t) = \begin{cases} t^2 - t\ln(t) & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}.$$

On note C la courbe représentative de f dans un repère orthonormal et on admet : $0,69 < \ln(2) < 0,70$.

(1) (a) Montrer que f est continue sur $[0;+\infty[$.
(b) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0;+\infty[$ et calculer, pour tout t de $]0;+\infty[$, $f'(t)$ et $f''(t)$.
(c) Dresser le tableau des variations de f. On précisera la limite de f en $+\infty$.
(d) Montrer que C admet une tangente verticale en O.
(e) Montrer que C admet un point d'inflexion et un seul, noté I, et préciser les coordonnées de I.
(f) Tracer l'allure de C.

(2) On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$.
(a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in \left[\dfrac{1}{2};1\right]$.
(b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
(c) Étudier les variations de la fonction $t \mapsto t - \ln(t)$ puis en déduire les solutions de l'équation $f(t) = t$.
(d) Déduire des questions précédentes que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
(e) Écrire un programme qui calcule et affiche un entier naturel N tel que $1 - u_N < 10^{-4}$.

Suites récurrentes et IAF

Exercice 303. (D'après **ECRICOME 2007**) Soit a un réel strictement positif. On considère la fonction f_a définie pour tout réel t strictement positif par :

$$f_a(t) = \frac{1}{2}\left(t + \frac{a^2}{t}\right),$$

ainsi que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ déterminée par son premier terme $u_0 > 0$ et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = f_a(u_n).$$

(1) Dresser le tableau de variation de f_a.
(2) En déduire que : $\forall t > 0,\ f_a(t) \geq a$.
(3) Démontrer que

$$\forall t > a,\ 0 < f_a'(t) < \frac{1}{2}.$$

(4) Montrer que pour tout entier n, non nul : $u_n \geq a$.
(5) Prouver que pour tout entier n non nul

$$0 \leq u_{n+1} - a \leq \frac{1}{2}\left(u_n - a\right).$$

(6) En déduire que

$$|u_n - a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} |u_1 - a|.$$

(7) En déduire la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et indiquer sa limite.
(8) En utilisant ce qui précède, écrire un programme permettant d'afficher les 100 premiers termes d'une suite (u_n), de premier terme 1, convergeant vers $\sqrt{2}$.

Suites implicites

Exercice 304. (D'après **ECRICOME 2019**) Pour tout entier n non nul, on note h_n la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par :

$$\forall x > 0 \qquad h_n(x) = x^n + 1 + \frac{1}{x^n}$$

(1) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, la fonction h_n est strictement décroissante sur $]0,1]$[et strictement croissante sur $[1,+\infty[$.

(2) En déduire que pour tout entier n non nul, l'équation : $h_n(x) = 4$ admet exactement deux solutions, notées u_n et v_n et vérifiant : $0 < u_n < 1 < v_n$.

(3) (a) Démontrer que :

$$\forall x > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad h_{n+1}(x) - h_n(x) = \frac{(x-1)(x^{2n+1}-1)}{x^{n+1}}.$$

(b) En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad h_{n+1}(v_n) \geq 4.$$

(c) Montrer alors que la suite (v_n) est décroissante.

(4) (a) Démontrer que la suite (v_n) converge vers un réel ℓ et montrer que $\ell \geq 1$.
(b) En supposant que $\ell > 1$, démontrer que

$$\lim_{n\to+\infty} v_n^n = +\infty.$$

En déduire une contradiction.
(c) Déterminer la limite de (v_n).

(5) (a) Montrer que : $\forall n \geq 1 \quad v_n \leq 3$
(b) Écrire une fonction en Python `h(n,x)` qui renvoie la valeur de $h_n(x)$ lorsqu'on lui fournit un entier naturel n non nul et un réel $x \in \mathbb{R}^{+*}$ en entrée.

(c) Compléter la fonction suivante pour qu'elle renvoie une valeur approchée à 10^{-5} près de v_n par la méthode de dichotomie lorsqu'on lui fournit un entier $n \geq 1$ en entrée :

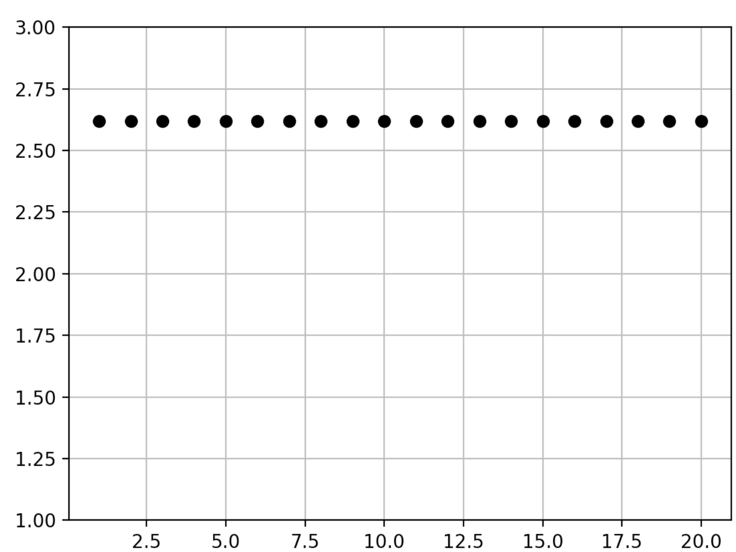
```
def v(n):
    a=1
    b=3
    while (b-a)>10**(-5):
        c=(a+b)/2
        if h(n,c) <4:
            ...
        else :
            ...
    ...
```

(d) À la suite de la fonction v, on écrit le code suivant dont l'exécution permet l'affichage ci-après

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

X=[k for k in range(1, 21)]
Y=np.zeros(20)
for k in range(20):
    Y[k]=v(k+1)**(k+1)
plt.grid()
plt.plot(X,Y, 'ko')
plt.ylim(1, 3) # on fixe la plage des ordonnées
plt.show()
```

Affichage Python



Expliquer ce qui est affiché sur le graphique ci-dessus.
Que peut-on conjecturer ?

(e) Montrer que :

$$\forall n \geq 1, \qquad (v_n)^n = \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

(f) Retrouver ainsi le résultat de la question 4) c.

Exercice 305. Soit f la fonction définie sur $]0;1[$ par $f(x) = -\ln\left(\dfrac{1}{x} - 1\right)$.

(1) Étudier f.
(2) Montrer que f admet une bijection réciproque notée g.
Donner le sens de variations de g, montrer qu'elle est dérivable et calculer $g'(0)$.
Calculer $g(y)$ en fonction de y.

(3) Soit h définie par $h(x) = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$.
Montrer que l'équation $h(x) = x$ admet une seule solution dans $\mathbb{R}$ notée a.

(4) On définit la suite (u_n) par $u_0 = 1/2$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = h(u_n)$.
Montrer que, pour tout n on a : $|u_{n+1} - a| \leq \dfrac{1}{3}|u_n - a|$.
En déduire la convergence de la suite (u_n).

Exercice 306. (D'après **ESSEC 1995**, Extrait de **DM n°3**, Automne 2021)

Le but de cet exercice est d'étudier, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les solutions positives de l'équation

$$(E_n) \qquad\qquad e^x = x^n.$$

Pour ce faire, on introduit la fonction $f_n :\ x \mapsto 1 - x^n e^{-x}$.

(1) **Partie I :** Étude des solutions positives de (E_1) et (E_2)

(a) Étudier et représenter graphiquement les fonctions f_1 et f_2 sur $[0;+\infty[$.
(b) Conclure quant à l'existence de solutions positives pour (E_1) et (E_2).

(2) **Partie II** : Études des solutions positives de (E_3)

(a) Étudier et représenter sur $[0;+\infty[$ la fonction f_3.
On donne, pour guider l'étude, le résultat d'affichage Python des instructions suivantes

```python
import numpy as np

for k in range(1, 6):
    print(np.exp(k))
```

Affichage Python

```
-->
2.7182818
7.3890561
20.085537
54.598150
148.41316
```

(b) En déduire que l'équation (E_3) admet deux solutions positives u et v vérifiant $1 < u < v$.
Encadrer u puis v par deux entiers consécutifs.

(c) On introduit la suite (y_n) définie par son premier terme $y_0 > u$ et la relation $y_{n+1} = 3\ln(y_n)$.
(i) Montrer que si $y_0 \in]u, v]$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_n \in]u, v]$.
(ii) Montrer que si $y_0 \geq v$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_n \geq v$.
(iii) Étudier le signe de $y_{n+1} - y_n$ en fonction du signe de $y_n - y_{n-1}$.
(iv) Déduire des questions précédentes le sens de variations de la suite (y_n) en fonction d'où se trouve son premier terme.
(v) Étudier la convergence de (y_n).

(d) On choisit alors $y_0 = 4$.

(i) Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leq v - y_{n+1} \leq \dfrac{3}{4}(v - y_n)$.
(ii) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$0 \leq v - y_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

(iii) Écrire un programme qui permette de fournir une valeur approchée de v à 10^{-4} près.

(3) **Partie III** : Étude des solutions positives de (E_n) pour $n \geq 3$.

(a) Étudier la fonction f_n sur $[0; +\infty[$. En déduire que (E_n) admet deux solutions positives notées u_n et v_n et vérifiant $1 < u_n < v_n$.

(b) Déterminer, pour $n \geq 4$, le signe de $f_n(u_{n-1})$. En déduire le sens de variations de la suite (u_n) puis prouver la convergence de celle-ci vers une certaine limite ℓ.

(c) Montrer que $u_n = \exp(u_n/n)$. En déduire la valeur de ℓ. En déduire également un équivalent simple de $u_n - \ell$ lorsque $n \to +\infty$.

(d) Déterminer, pour $n \geq 4$, le signe de $f_{n-1}(v_n)$. En déduire le sens de variations de (v_n).

(e) Établir que la fonction $g : x \mapsto x - \ln(x)$ réalise dune bijection de $[1; +\infty[$ sur un intervalle à déterminer. Vérifier que $g(v_n/n) = \ln(n)$ puis conclure quant à la limite de (v_n) et proposer un équivalent de v_n lorsque $n \to +\infty$.

<u>Autres suites</u>: un peu d'exotisme

Exercice 307. (D'après **ECRICOME 1999** - Concours Blanc ECE 1 Janvier 2016)

- **Préliminaires.** Soit (x_n) une suite numérique qui vérifie, pour tout entier naturel n, la relation :

$$x_{n+2} = \frac{1}{3}x_{n+1} + \frac{1}{3}x_n.$$

Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$. (On donne: $\frac{1+\sqrt{13}}{6} = 0,77$ à 10^{-2} près par excès et $\frac{1-\sqrt{13}}{6} = -0,44$ à 10^{-2} près par défaut.)

Soient alors a et b sont deux réels supérieurs ou égaux à 1. On étudie la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = a \;\; u_1 = b$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+2} = \sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n+1}}.$$

- **Question 1**

(a) Montrer que, pour tout entier naturel n, u_n est bien défini et vérifie $u_n \geq 1$.
(b) Montrer que la seule limite possible de la suite (u_n) est 4.
(c) Écrire un programme en Python qui calcule et affiche la valeur de u_n pour des valeurs de a et b réelles supérieures ou égales à 1 et de n entier supérieur ou égal à 2, entrées par l'utilisateur.

- **Question 2**

On se propose d'établir la convergence de la suite (u_n) par l'étude d'une suite auxiliaire (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par :

$$v_n = \frac{1}{2}\sqrt{u_n} - 1.$$

(a) Montrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4$.

(b) Vérifier, pour tout entier naturel n, on a $v_{n+2} = \dfrac{v_{n+1}+v_n}{2(2+v_{n+2})}$.

En déduire que : $|v_{n+2}| \leq \dfrac{1}{3}\left(|v_{n+1}| + |v_n|\right)$.

(c) On note (x_n) la suite définie par : $x_0 = |v_0|$, $x_1 = |v_1|$ et, pour tout entier naturel n,

$$x_{n+2} = \frac{1}{3}x_{n+1} + \frac{1}{3}x_n.$$

Montrer que, pour tout entier naturel n, $|v_n| \leq x_n$ et conclure quant à la convergence de la suite (u_n).

Exercice 308. On considère, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n définie sur R_+ par

$$f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}.$$

(1) Étudier les variations de f_n sur $\mathbb{R}_+$. Donner un équivalent de $f_n(x)$ en $+\infty$ et y préciser la limite de $f_n(x)$.

(2) On introduit la suite (u_n) définie par son premier terme $u_1 = 1/3$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = f_n(u_n).$$

(3) S'agit-il d'une suite récurrente comme celles étudiées dans ce chapitre?

(4) Calculer u_2 et u_3.

(5) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$. En déduire la monotonie de (u_n).

(6) Montrer que (u_n) converge vers une limite ℓ que l'on déterminera à l'aide d'un raisonnement par l'absurde.

(7) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n \leq \frac{1}{n}.$$

(8) En déduite que la suite (nu_n) est croissante, puis qu'elle converge vers un réell $\ell' \in]0;1]$.

(9) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} \leq 1.$$

(10) Conclure quant à la valeur de ℓ'.

6 Bonus : Méthode de Lagrange

On présente ici une autre méthode itérative (que la méthode de dichotomie) pour trouver une approximation des solutions d'équations du type

$$f(x) = 0,$$

où f est une fonction avec certaines propriétés de régularité (qu'on précisera ci-après). La méthode s'appelle *Méthode de Lagrange* (aussi parfois appelée méthode de la sécante).

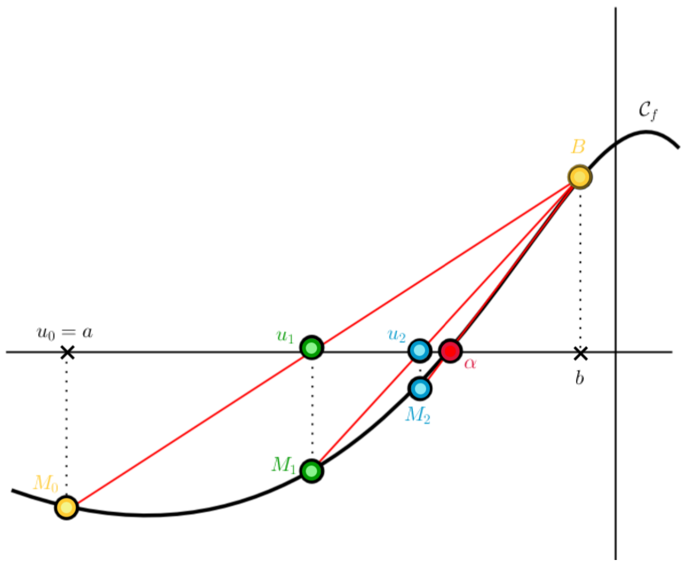
☞ L'idée est, connaissant un intervalle $[a, b]$ sur lequel la fonction s'annule, de considérer la suite des points d'intersection de la courbe avec des cordes.

Illustration

Joseph Louis LAGRANGE
1736-1813

Illustration

Constructions successives avec la méthode de Lagrange



Si B a pour coordonnées $(b, f(b))$ et M est un point de coordonnées $(u, f(u))$ (avec $u \in [a; b[$), alors la droite (BM) coupe l'axe des abscisses en

$$v = \frac{bf(u) - uf(b)}{f(u) - f(b)}$$

(Ces calculs se vérifient facilement, on a donc décidé de ne pas alourdir le sujet en demandant de les retrouver.) On note α la solution de $f(x) = 0$ sur $[a; b]$. On introduit donc les fonctions

$$g : x \in [a; b[\longmapsto \frac{bf(x) - xf(b)}{f(x) - f(b)}$$

et

$$h : x \in [a; b] \longmapsto f(b)^2 + (x - b)f'(x)f(b) - f(b)f(x).$$

On suppose ici que la fonction f a les propriétés suivantes:

Hypothèses

(i) La fonction f est deux fois dérivable sur $[a; b]$;
(ii) $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$;
(iii) Pour tout $x \in [a; b]$, $f'(x) > 0$ (c'est à dire que la fonction y est strictement croissante);
(iv) Pour tout $x \in [a; b]$, $f''(x) > 0$ (c'est à dire que la fonction y est *convexe*).

(1) Justifier l'existence d'un unique $\alpha \in [a; b]$ tel que $f(\alpha) = 0$. Déterminer le signe de $f(x)$ sur $[a; b]$.
(2) Étudier les variations de h.
(3) Calculer $h(b)$. En déduire le signe de $h(x)$ puis la monotonie de g sur $[a; b[$.
(4) Déterminer ensuite le signe de $g(x) - x$ sur $[a; b[$.

(5) On introduit alors la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 &= a \\ u_{n+1} &= g(u_n) \qquad (n \geq 0) \end{cases}$$

(a) Montrer, par récurrence, que u_n est bien défini pour tout n et que, de plus, $u_n \in [a; \alpha[$.
(b) On suppose dans cette question (et dans cette question seulement) que (u_n) converge vers une limite ℓ. Dans quel intervalle se trouve nécessairement ℓ? Conclure quant à l'unique valeur possible pour ℓ.
(c) Montrer que (u_n) converge (on pourra étudier sa monotonie à l'aide du signe de $g(x) - x$). Conclure.

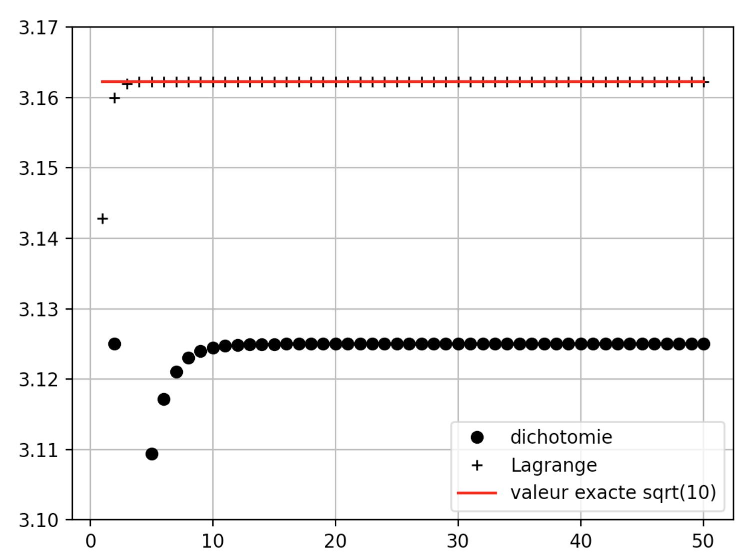
(6) Comparaison des méthodes de dichotomie et de Lagrange avec Python.

(a) Écrire une fonction Python `Lagrange(f, n, a, b)` qui renvoie la *valeur approchée* de la solution $f(x) = 0$ sur $[a, b]$ correspondant à n itérations de la méthode de Lagrange.
(b) Écrire de même une fonction `Dichotomie(f, n, a, b)`
(c) On compare graphiquement :

```python
def f(x):
    return x**2-10

X=[k for k in range(1, 51)]
Y1=[dichotomie(f, k, 3, 4) for k in range(1, 51)]
Y2=[Lagrange(f, k, 3, 4) for k in range(1, 51)]
Y=[np.sqrt(10) for k in range(1, 51)]
plt.grid()
plt.plot(X, Y1, 'ko')
plt.plot(X, Y2, 'k+')
plt.plot(X, Y, color='red')
plt.legend(["dichotomie","Lagrange","valeur exacte sqrt(10)"],
    loc ="lower right")
plt.ylim(3.10, 3.17) # zoom
plt.show()
```

Affichage Python



☞ Le sujet **ECRICOME 2006** propose encore une autre méthode, appelée *méthode de Newton*, pour laquelle on peut même expliciter la vitesse de convergence très rapide, mais avec des conditions plus restrictives sur f que celles de la méthode de Lagrange.