Chapitre 4. Applications linéaires. Endomorphismes

1 Généralités

☞ On généralise à des espaces vectoriels de dimension finie la notion d'application linéaire entre $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ rencontrée dans le cours de première année.

Définition

Soient E et F deux espaces vectoriels (de dimension finie).
On dit qu'une application $\varphi : E \to F$ est **linéaire** si

(i) Pour tous $u, v \in E$, $\varphi(u+v) = \varphi(u) + \varphi(v)$;
(ii) Pour tout $u \in E$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\varphi(\lambda u) = \lambda \varphi(u)$.

Lorsque $E = F$ (et uniquement dans ce cas), on dit que φ est un **endomorphisme**.

Règle(s) de calcul

☞ Si φ est linéaire, alors
$$\varphi(0_E) = 0_F.$$
(*Une application qui n'envoie pas* 0 *sur* 0 *n'est donc pas linéaire.*)

☞ Il découle aussi immédiatement de la définition que, pour tout $u \in E$
$$\varphi(-u) = -\varphi(u)$$
et, plus généralement, pour tous $u_1, u_2, ..., u_n \in E$ et tous $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$
$$\varphi(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + ... + \lambda_n u_n) = \lambda_1 \varphi(u_1) + \lambda_2 \varphi(u_2) + ... + \lambda_n \varphi(u_n).$$

☞ Pour vérifier qu'une application donnée est bien une application linéaire, on utilise plutôt la définition équivalente ci-dessous.

À retenir!

Soit $\varphi : E \to F$. On a équivalence
(i) φ est une application linéaire;
(ii) Pour tous $u, v \in E$ et tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a
$$\varphi(\lambda u + \mu v) = \lambda \varphi(u) + \mu \varphi(v). \qquad (\star)$$

Exemple

(1) L'application **identité** $\mathrm{Id}_E : E \to E$, $u \mapsto u$ est un endomorphisme de E.

(2) L'application $\varphi : E \to F$, $u \mapsto 0_F$ est une application linéaire, appelée **application nulle**.

(3) L'application $\varphi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $u = (x, y) \mapsto (x + y, x - y, 3y)$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$. Ce n'est pas un endomorphisme.

(4) L'application $\varphi_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $u = (x, y) \mapsto (2x + y, -y)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.

(5) L'application $\varphi_3 : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$, $P \mapsto P'$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

(6) L'application $\varphi_4 : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $M \mapsto {}^tM$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(7) Soient $(e_1, ..., e_n)$ et $(f_1, ..., f_n)$ deux bases de E. L'application $\varphi_5 : E \to E$, $e_i \mapsto f_i$ est un endomorphisme de E.

(8) Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. L'application $f_A : \mathcal{M}_{3,1} \to \mathcal{M}_{3,1}$, $X \mapsto AX$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_{3,1}$. On verra que tout endomorphisme peut être ramené à cette forme.

☞ Beaucoup d'exercices demandent de vérifier qu'une application définie au préalable est un endomorphisme; pour cela on vérifie donc deux choses

- Que l'application φ arrive bien dans l'espace vectoriel d'arrivée, *i.e.*

$$\forall u \in E, \quad \varphi(u) \in E$$

  (*Ceci est notamment important lorsqu'on construit des applications entre espaces de polynômes, il faut vérifier que le degré du polynôme image n'est pas augmenté.*)

- Que l'application φ est bien linéaire à l'aide la relation $(\star)$.

Exercice 1. Montrer que l'application $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $\varphi(x, y, z) = (z, 2y + 3z, x - y - z)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2. Montrer que l'application $\varphi : P \in \mathbb{R}_3[X] \mapsto (X^2 - 1)P'' - 2XP' + P$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$. Préciser l'image de chacun des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 3. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(1) Montrer que P est inversible.
(2) On considère l'application $\varphi : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $M \mapsto P^{-1}MP$.
   (a) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   (b) Montrer que φ est bijectif. Expliciter φ^{-1}.

Définition

Une application linéaire bijective s'appelle un **isomorphisme** d'espaces vectoriels.

Lorsque les espaces d'arrivée et de départ sont les mêmes (c'est à dire lorsqu'on a un endomorphisme), un isomorphisme est parfois appelé **automorphisme**.

☞ Dans l'Exercice 3 ci-dessus, φ est donc un automorphisme.

2 Noyau, Image, Rang

Définition

Soit φ une application linéaire de E dans F. On appelle **noyau** de φ l'ensemble, noté $\mathrm{Ker}(\varphi)$, des vecteurs de E envoyés par φ sur le vecteur nul 0_F

$$\mathrm{Ker}(\varphi) = \{u \in E :\ \varphi(u) = 0_F\}.$$

C'est un sous-espace vectoriel de E.

☞ φ étant linéaire, $\mathrm{Ker}(\varphi)$ contient toujours au moins le vecteur nul de E (et n'est donc **jamais vide**)

$$0_E \in \mathrm{Ker}(\varphi).$$

À retenir!

☞ Pour **déterminer le noyau** de φ, on résout l'équation (ou le système d'équations) $\varphi(u) = 0$ et on exprime les solutions sous forme d'un Vect()

Exemple

Considérons par exemple $\varphi :\ X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \mapsto AX$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On écrit

$$\begin{aligned}
X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(\varphi) &\iff \varphi(X) = 0 \iff AX = 0 \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcl} x + y &=& 0 \\ x + y &=& 0 \end{array} \right. \iff y = -x \\
&\iff X = \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\
&\iff X \in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}$$

Donc

$$\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

Exercice 4. Déterminer le noyau de chacune des applications linéaires ci-dessous

(1) $f :\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ u = (x, y, z) \mapsto (x + y, y - z)$;
(2) $g :\ \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}^2,\ P \mapsto (P(1), P'(1))$;
(3) $h :\ \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ M \mapsto AM - MA$, où $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Propriété

Soit φ une application linéaire de E dans F. Alors

$$\varphi \text{ est injective } \iff \mathrm{Ker}(\varphi) = \{0_E\}.$$

☞ La linéarité permet de ramener l'étude de l'injectivité de Φ en 0. Ce résultat est crucial!

Exercice 5. Parmi les trois applications linéaires ci-dessous, lesquelles sont injectives?

$$(i) \quad f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2, \\ (x, y, z) & \mapsto & (2x + 3y - 2z, x - z) \end{array}$$

$$(ii) \quad f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array} \quad ; \qquad (iii) \quad f_3 : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & {}^tM \end{array}$$

Définition

Soit φ une application linéaire de E dans F. On appelle **image** de φ l'ensemble, noté $\mathrm{Im}(\varphi)$, des vecteurs de F ("*touchés par* φ") admettant un antécédent par φ:

$$\mathrm{Im}(\varphi) = \{v \in F : \exists\, u \in E,\ v = \varphi(u)\} = \{\varphi(u) : u \in E\}.$$

C'est un sous-espace vectoriel de F.

Propriété

Soit φ une application linéaire de E dans F. Alors

$$\varphi \text{ est surjective } \iff \mathrm{Im}(\varphi) = F.$$

☞ Le caractère linéaire permet de voir immédiatement que, si E est de dimension finie et que $\mathcal{B} = (u_1, u_2, ..., u_n)$ est une base de E,

$$\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Vect}(\varphi(u_1), \varphi(u_2), ..., \varphi(u_n)).$$

À retenir!

☞ Pour **déterminer** l'image, on détermine donc le sous-espace engendré par les images des vecteurs d'une base de l'espace de départ.

Exercice 6. Pour chacune des applications linéaires de l'Exercice 5, déterminer l'image et préciser si l'application est surjective ou non.

Définition

Soit φ une application linéaire de E dans F. On appelle **rang** de φ la dimension de l'image de φ

$$\mathrm{rg}(\varphi) = \dim(\mathrm{Im}(\varphi)).$$

☞ L'image de φ étant un sous-espace vectoriel de F, on a toujours

$$\mathrm{rg}(\varphi) \leq \dim(E).$$

À retenir!

☞ Si $\mathcal{B} = (u_1, u_2, ..., u_n)$ est une base quelconque de E,

$$\mathrm{rg}(\varphi) = \dim\left(\mathrm{Vect}(\varphi(u_1), \varphi(u_2), ..., \varphi(u_n))\right).$$

☞ Avec ce qui précède, on a aussi

$$\varphi \text{ surjective } \iff \mathrm{Im}(\varphi) = F \iff \mathrm{rg}(\varphi) = \dim(F).$$

Exercice 7. Déterminer le rang de l'application

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2 & \to & \mathcal{M}_2 \\ M & \mapsto & M + {}^tM \end{array}$$

☞ Le théorème qui suit est central dans l'étude des endomorphismes. Il permet bien souvent de déduire des informations sans ajouter de calculs supplémentaires.

À connaître sur le bout des doigts

Théorème du rang. Soit φ une application linéaire de E dans F. Alors,
$$\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) + \mathrm{rg}(\varphi).$$

☞ On observe que **seule** la dimension de **l'espace de départ** intervient dans le théorème du rang.

Exercice 8. Déterminer le rang de l'application linéaire
$$\begin{array}{cccc} f: & \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} & \longmapsto & (a+e+i,\ c+e+g,\ a+c+g+i) \end{array}$$

Exercice 9. Soit f un endomorphisme non nul d'une espace vectoriel E de dimension 3 tel que $f \circ f = 0$.

(1) Montrer que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.
(2) En déduire que $\dim(\mathrm{Ker}(f)) \geq 2$.
(3) Conclure que $\mathrm{rg}(f) = 1$.

☞ Il découle du théorème la propriété suivante.

Propriété

Soit φ une application linéaire de E dans F. Alors,

(i) Si $\dim(E) < \dim(F)$, alors Φ n'est pas surjective;
(ii) Si $\dim(F) < \dim(E)$, alors Φ n'est pas injective;
(iii) Si $\dim(E) = \dim(F)$, alors on a équivalence
$$\varphi \text{ est un isomorphisme} \iff \varphi \text{ est injectif} \iff \varphi \text{ est surjectif.}$$

☞ En prenant $E = F$ dans le résultat précédent, on obtient l'équivalence ci-dessous. En particulier, il suffit la plupart du temps de vérifier qu'un endomorphisme est injectif (car c'est souvent plus facile que surjectif) en déterminant son noyau pour obtenir le caractère bijectif.

À connaître sur le bout des doigts

Soient E un espace vectoriel de dimension n et φ un endomorphisme de E. Alors,
$$\begin{aligned} \varphi \text{ est un automorphisme} &\iff \varphi \text{ est injectif} \\ &\iff \mathrm{Ker}(\varphi) = \{0_E\} \\ &\iff \mathrm{Im}(\varphi) = E \\ &\iff \mathrm{rg}(\varphi) = n \\ &\iff \varphi \text{ est surjectif.} \end{aligned}$$

3 Endomorphisme associé à une matrice

On s'intéresse dans cette section à un cas (pas si) particulier d'application linéaire. On verra dans la suite que tout endomorphisme se ramène à ce type d'application linéaire.

Définition

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors, l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ X & \longmapsto & AX \end{array}$$

est un endomorphisme, dit endomorphisme **canoniquement associé** à A.

Définition

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On appelle **noyau** de A, et on note $\mathrm{Ker}\,(A)$, le noyau de l'endomorphisme canoniquement associé à A, c'est à dire sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ défini par :

$$\mathrm{Ker}\,(A) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 0\}\,.$$

On appelle **image** de A, et on note $\mathrm{Im}(A)$, l'image de l'endomorphisme canoniquement associé à A. Notant $C_1, ..., C_n$ les colonnes de A (et observant que $Ae_i = C_i$ (où $(e_1, .., e_n)$ base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a

$$\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}(C_1, ..., C_n)$$

On appelle alors **rang** de A, le rang de l'endomorphisme canoniquement associé à A et on a bien sûr

$$\mathrm{rg}(A) = \dim(\mathrm{Im}(A)) = \dim\left(\mathrm{Vect}(C_1, ..., C_n)\right)$$

☞ Le rang d'une matrice est alors égale au rang de la famille de vecteurs constituée de ses colonnes.

avec Python

La commande `matrix_rank( )` de la librairie `numpy.linalg` renvoie le rang d'une matrice.

À connaître sur le bout des doigts

Théorème du rang pour les matrices. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors :

$$\dim(\mathrm{Ker}\,(A)) + \mathrm{rg}\,(A) = n.$$

Caractérisation de l'inversibilité

$$A \text{ est inversible} \iff \mathrm{Ker}\,(A) = \{0\} \iff \mathrm{rg}\,(A) = n.$$

Exercice 10. Discuter sans calcul de l'inversibilité des matrices ci-dessous

$$(i)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 11. On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(1) Déterminer le rang de A.
(2) Calculer AU.
(3) En déduire $\mathrm{Ker}(A)$.

4 Matrice d'une application linéaire dans une base

On voit dans cette section que tout endomorphisme peut finalement se représenter sous la forme du cas particulier précédent.

4.1 Action d'une application linéaire sur une base

Propriété

Soit φ une application linéaire de E dans F. Alors, φ est entièrement déterminée par l'image des vecteurs d'une base de E.

☞ Le résultat précédent signifie qu'il suffit de connaître les images des vecteurs d'une base quelconque de l'espace de départ pour "connaître" φ.

Propriété

Soient φ et ψ deux applications linéaires de E dans F. Si φ et ψ coïncident sur les vecteurs d'une base de E, alors $\varphi = \psi$.

☞ Les propriétés d'injectivité, de surjectivité et de bijectivité se traduisent sur la famille des images des vecteurs de la base de départ. On rappelle au lecteur que si $(u_1, ..., u_n)$ est une base de E, alors

$$\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Vect}(\varphi(u_1), ..., \varphi(u_n)).$$

Propriété

Soient φ une application linéaire de E dans F et $\mathcal{B} = (u_1, u_2, ..., u_n)$ une base de E. Alors,

(i) φ est injective si et seulement si $(\varphi(u_1), \varphi(u_2), ..., \varphi(u_n))$ est libre;
(ii) φ est surjective si et seulement si $(\varphi(u_1), \varphi(u_2), ..., \varphi(u_n))$ est génératrice dans F;
(iii) φ est bijective si et seulement si $(\varphi(u_1), \varphi(u_2), ..., \varphi(u_n))$ est une base de F.

4.2 Matrice associée à une application linéaire

Considérons une application linéaire

$$\varphi : \ E \longrightarrow F,$$

$\mathcal{B}_E = (u_1, ..., u_p)$ une base de E et $\mathcal{B}_F = (v_1, ..., v_n)$ une base de F.

On a dit que φ est entièrement caractérisée par son action sur $\mathcal{B}_E$. Or, tout vecteur de F se décompose de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}_F$.
Ainsi, le *tableau* des cordonnées des images des $\varphi(u_i)$ dans la base $\mathcal{B}_F$ contient toutes les informations sur φ. On l'appelle la matrice de φ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}_F$.

Définition

La matrice de φ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}_F$ est la matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}$ dont les colonnes sont constituées des coordonnées dans la base $\mathcal{B}_F$ des vecteurs $\varphi(e_i)$ (pour $1 \leq i \leq p$). Plus précisément,

$$A = \mathrm{Mat}(\varphi, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F) = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq p}$$

où, pour tout $1 \leq j \leq p$,

$$\varphi(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} v_i.$$

Lorsque $E = F$, alors la matrice A est simplement notée $\mathrm{Mat}(\varphi, \mathcal{B}_E)$.

À retenir!

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \varphi(u_1) & & \varphi(u_p) \\ \downarrow & & \downarrow \end{array} & \\ \mathrm{Mat}(\varphi, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F) = & \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow \text{coordonnée selon } v_1 \\ \\ \leftarrow \text{coordonnée selon } v_n \end{array} \end{array}$$

☞ On insiste sur le fait que la matrice d'une application linéaire n'a de sens que si les bases de départ et d'arrivée sont précisées.

☞ Attention, si on change l'ordre des vecteurs dans les bases, on change la matrice de l'application.

☞ Une même application linéaire admet donc une infinité de représentations matricielles, selon les bases choisies.

Exemple

☞ La matrice de l'application identité (de E dans E, avec $\dim(E) = n$) est la matrice identité

$$\mathrm{Mat}(\mathrm{Id}_E, \mathcal{B}_E) = I_n.$$

Exercice 12. Déterminer la matrice dans les bases canoniques des applications linéaires suivantes

$$(i)\ f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (2x - y + z, y - 3z, x + 2z) \end{array} ;$$

$$(ii)\ f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array} ; \qquad (iii)\ f_3 : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2 & \to & \mathcal{M}_2 \\ M & \mapsto & {}^tM \end{array} ;$$

À retenir!

Soient E et F deux espaces vectoriels, $\mathcal{B}_E = (e_1, ..., e_p)$ une base de E et $\mathcal{B}_F = (v_1, ..., v_n)$ une base de F et φ une application linéaire de E dans F.

On note $A = \mathrm{Mat}(\varphi, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)$.

Soient $u \in E$ et $v \in F$. Si $X \in \mathcal{M}_{p,1}$ représente les coordonnées de u dans $\mathcal{B}_E$ et $Y \in \mathcal{M}_{n,1}$ représente les coordonnées de v dans $\mathcal{B}_F$, alors

$$v = \Phi(u) \iff Y = AX.$$

☞ Une application linéaire n'est donc rien d'autre qu'une multiplication matricielle sur les coordonnées d'un vecteur dans une certaine base.

Propriété

(Composition et puissances). Soient E, F, G trois espaces vectoriels de dimension finie et $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G$ des bases de chaque espace respectivement.

(1) Si φ est une application linéaire de E dans F et ψ une application linéaire de F dans G, alors
$$\mathrm{Mat}(\psi \circ \varphi, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_G) = \mathrm{Mat}(\psi, \mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G) \cdot \mathrm{Mat}(\varphi, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F).$$

(2) Si φ est un endomorphisme de E et $n \in \mathbb{N}$, alors $\mathrm{Mat}(\varphi^n, \mathcal{B}_E) = \mathrm{Mat}(\varphi, \mathcal{B}_E)^n$.

☞ Toutes les propriétés d'injectivité, de surjectivité et de bijectivité sur Φ sont équivalentes aux même propriétés sur la matrice de Φ dans des bases quelconques.

À connaître sur le bout des doigts

Soient φ un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n, $\mathcal{B}_E$ une base **quelconque** de E et A la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}_E$. Alors

$$\begin{aligned}
\varphi \text{ est un automorphisme} &\iff \varphi \text{ est injectif} \\
&\iff \varphi \text{ est surjectif} \\
&\iff \mathrm{Ker}(\varphi) = \{0_E\} \\
&\iff \mathrm{Im}(\varphi) = E \\
&\iff \mathrm{Ker}(A) = \{0_{\mathcal{M}_{n,1}}\} \\
&\iff \mathrm{Im}(A) = \mathcal{M}_{n,1} \\
&\iff A \text{ est inversible}
\end{aligned}$$

☞ En particulier, et avec la propriété qui précède, on voit que, si φ est un automorphisme de E, alors

$$\mathrm{Mat}(\varphi^{-1}, \mathcal{B}_E) = \mathrm{Mat}(\varphi, \mathcal{B}_E)^{-1}.$$

Remarque

Une matrice dont les colonnes sont libres est donc de rang maximal et par conséquent inversible.

Les colonnes d'une matrice inversible forment toujours une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Hors Programme mais...

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies respectives p et n, $\mathcal{B}_E$ une base de E, et $\mathcal{B}_F$ une base de F. Notant $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

L'application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E,F) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \\ \varphi & \longmapsto & \mathrm{Mat}(\varphi, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F) \end{array}$$

est linéaire et bijective.
Ainsi, $\mathcal{L}(E,F)$ est un espace vectoriel et on a

$$\dim(\mathcal{L}(E,F)) = np = \dim(E) \times \dim(F).$$

5 Matrices semblables

On a dit plus haut qu'un endomorphisme pouvait être représenté (selon les bases choisies) par une infinité de matrices. Si ces matrices sont en effet différentes, elles vont vérifier certaines propriétés et relations du fait de représenter ce même endomorphisme.

5.1 Matrices de passage

On commence par présenter la notion de *matrice de passage* qui permet de passer des coordonnées d'un vecteur dans une certaine base à celles dans une autre base par une opération matricielle.

Définition

Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases d'un même espace E. On appelle matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ la matrice de l'application Id_E entre $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}$

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \mathrm{Mat}(\mathrm{Id}_E, \mathcal{B}', \mathcal{B})$$

☞ Il s'agit de la matrice dont les colonnes sont composées des coordonnées des vecteurs de la nouvelle base $\mathcal{B}'$ exprimées dans l'ancienne base $\mathcal{B}$.

C'est une matrice inversible (ses colonnes sont libres). De plus,

$$(P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'})^{-1} = \mathrm{Mat}(\mathrm{Id}_E, \mathcal{B}, \mathcal{B}') = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$$

À retenir!

Notant $\mathcal{B} = (u_1, ..., u_n)$ et $\mathcal{B}' = (v_1, ..., v_n)$, on forme la matrice de passage comme suit.

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v_1 & & v_n \\ \downarrow & & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow \text{coordonnée selon } u_1 \\ \\ \leftarrow \text{coordonnée selon } u_n \end{array} \quad ,$$

et

$$P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u_1 & & u_n \\ \downarrow & & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} b_{1,1} & \dots & b_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n,1} & \dots & b_{n,p} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow \text{coordonnée selon } v_1 \\ \\ \leftarrow \text{coordonnée selon } v_n \end{array}$$

où

$$v_k = \sum_{i=1}^{n} a_{i,k} u_i, \qquad u_j = \sum_{i=1}^{n} b_{i,j} v_i.$$

Exercice 13. Soit $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. Soit $\mathcal{B}' = (R_0, R_1, R_2)$, où

$$R_0(X) = 1, \quad R_1(X) = X - 1, \quad \text{et} \quad R_2(X) = (X-1)^2,$$

une autre base de $\mathbb{R}_2[X]$. Déterminer la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ puis la matrice de passage Q de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.

Propriété

Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E.

Soit $u \in E$. On note $X \in \mathcal{M}_{n,1}$ les coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$ et $Y \in \mathcal{M}_{n,1}$ celles dans la base $\mathcal{B}'$. Alors,

$$Y = (P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'})^{-1} X, \quad \text{ou encore} \quad X = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} Y.$$

Exercice 14. Soit $\mathcal{B} = (e_0, e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Soit $\mathcal{B}' = (u, v, w)$, où $u = (1, -1, 1)$, $v = (0, 1, 1)$ et $w = (0, 1, -1)$, une autre base de $\mathbb{R}^3$.

(1) Déterminer la matrice de passage R de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
(2) Quelles sont les coordonnées du vecteur $(1, 2, 3)$ dans la base $\mathcal{B}'$?

5.2 Formule de changement de base

À connaître sur le bout des doigts

Formule de changement de base.
Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E et φ un endomorphisme de E. Alors,

$$\mathrm{Mat}(\varphi,\mathcal{B}) = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\mathrm{Mat}(\varphi,\mathcal{B}')\left(P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\right)^{-1}$$

ou de manière équivalente

$$\mathrm{Mat}(\varphi,\mathcal{B}') = \left(P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\right)^{-1}\mathrm{Mat}(\varphi,\mathcal{B})P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}.$$

Exercice 15. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

On pose : $u = (1,2,-1),\ v = (1,1,0),\ w = (2,0,1)$.

(1) Calculer $f(u)$.
(2) Montrer que $\mathrm{Ker}(f - id) = \mathrm{Vect}(v,w)$.
(3) Montrer que $\mathcal{B}' = (u,v,w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
(4) Déterminer la matrice A' de f dans la base $\mathcal{B}'$.
(5) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $f^n(u)$.

Remarque

☞ L'idée est alors de trouver une base dans laquelle la matrice qui représente l'endomorphisme est diagonale (ou au moins triangulaire), celle-ci rendant par exemple le calcul des puissances nettement plus simple. C'est tout l'objet du chapitre intitulé *Réduction des endomorphismes*.

5.3 Matrices semblables

Définition

Deux matrices M et M' de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont dites **semblables** s'il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible telle que

$$M' = P^{-1}MP.$$

À retenir!

☞ Deux matrices sont semblables si et seulement si elles représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes. La matrice P est alors la matrice de passage entre ces deux bases.

Propriété

Deux matrices semblables ont le même rang.
Si deux matrices sont semblables et que l'une est inversible, alors l'autre aussi.

☞ Une récurrence immédiate qu'il faut savoir refaire parfaitement donne la relation ci-dessous, très pratique comme on l'a déjà compris.

Propriété

Soient M et N deux matrices semblables telles que $M = P^{-1}NP$. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $M^k = P^{-1}N^kP$.

6 Sélection d'exercices - Travaux dirigés

Exercice 401. Déterminer la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.

(1) $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ avec $u = (1, 1, 1)$, $v = (1, -1, 0)$ et $w = (1, 1, -2)$.

(2) $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ et $\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$.

(3) $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathcal{B}' = (-X^2 + 2X + 1, X + 1, X^2 + 2)$.

(4) $\mathcal{B} = (1, X - 2, X^2 - 3X + 3)$ et $\mathcal{B}'$ est la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 402. Déterminer en un coup d'oeil le rang, le noyau et l'image de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 403. On note (J_1, J_2, J_3, J_4) la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Soit f l'application définie sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par

$$f : M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \longmapsto M + (a + d)I_2.$$

(1) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
(2) Déterminer la matrice A de f dans la base (J_1, J_2, J_3, J_4).
(3) (a) Montrer que $(J_1 - J_4, J_2, J_3, I_2)$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
  (b) Déterminer la matrice D de f dans cette base.
(4) Montrer que f est un automorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 404.

(1) (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\varphi : P(X) \mapsto (1 - X^2)P''(X) - 3XP'(X)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
  (b) Calculer $\varphi(1)$. L'endomorphisme φ est-il un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$?

(2) Dans cette question, on prend $n = 3$.
  (a) Donner la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.
  (b) Déterminer une base de $\mathrm{Im}(\varphi)$ et une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$.

Exercice 405. (D'après **L'école de la vie**) On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Justifier, **sans aucun calcul** que f est un automorphisme.
(2) Vérifier que $f \circ f \circ f \circ f = \mathrm{Id}$ (sans aucun calcul non plus) et en déduire l'expression de A^{-1} en fonction de A.
(3) Déterminer $E_1 = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$ et $E_{-1} = \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id})$.

Exercice 406. On considère les matrices carrées d'ordre trois suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) Déterminer trois vecteurs u, v et w de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tels que

- les coefficients de la deuxième ligne de u, v et w soient respectivement -1, 1 et 1.
- u forme une base de $\text{Ker}(A)$;
- $Av = -v$;
- $\text{Ker}(A - I) = \text{Vect}(w)$

(2) Vérifier que (u, v, w) forme une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Former la matrice P de passage de la base canonique vers cette nouvelle base.

(3) Déterminer P^{-1}.

(4) Vérifier que $P^{-1}AP = D$. Est-ce surprenant? Expliquer.

(5) On note φ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ représenté dans la base canonique par la matrice B. Montrer que la matrice de φ dans la base (u, v, w) est encore une matrice diagonale, que l'on notera C. Expliciter un lien ente C et B.

Exercices d'annales

Exercice 407. (D'après **EML 2019**).
On rappelle que deux matrices A et B de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ sont dites semblables lorsqu'il existe une matrice P de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que $B = P^{-1}AP$.

L'objectif de cet exercice est d'étudier des exemples de matrices inversibles qui sont semblables à leur inverse. Les trois parties de cet exercice sont indépendantes entre elles.

Partie A : Premier exemple

On considère l'endomorphisme φ de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(1) Justifier que φ est un automorphisme.

(2) Déterminer trois vecteurs u, v et w de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tels que

$$\text{Ker}(A - I) = \text{Vect}(u), \quad \text{Ker}\left(A - \frac{1}{2}I\right) = \text{Vect}(v), \quad \text{et} \quad \text{Ker}(A - 2I) = \text{Vect}(w).$$

(3) Vérifier que la famille $\mathcal{B}' = (v, u, w)$ forme une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et préciser la matrice D de φ dans cette base.

(4) En déduire une matrice P, inversible, telles que $A = PDP^{-1}$. Expliciter la matrice D^{-1}.

(5) On note $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer Q^2 et QDQ.

(6) En déduire que les matrices A et A^{-1} sont semblables.

Partie B : Deuxième exemple

On considère f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x,y,z) = (x, -z, y+2z).$$

On note M la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
On considère également les vecteurs u_1 et u_2 de $\mathbb{R}^3$ définis par : $u_1 = (1,0,0)$ et $u_2 = (0,1,-1)$.

(7) Expliciter la matrice M et montrer que M est inversible.

(8) (a) Montrer que (u_1, u_2) forme une base de $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$.
(b) Déterminer un vecteur u_3 de $\mathbb{R}^3$ tel que : $f(u_3) - u_3 = u_2$.
(c) Montrer que la famille $\mathcal{B}_1 = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

On admet que $\mathcal{B}_2 = (u_1, -u_2, u_3)$ est également une base de $\mathbb{R}^3$.

(9) (a) Écrire la matrice M_1 de f dans la base $\mathcal{B}_1$ et la matrice M_2 de f dans la base $\mathcal{B}_2$.
(b) Justifier que les matrices M_1 et M_2 sont semblables, et calculer $M_1 M_2$.

(10) En déduire que les matrices M et M^{-1} sont semblables.

Partie C : Troisième exemple

On considère la matrice T de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et on pose $N = T - I_3$.

(11) Justifier que la matrice T est inversible.

(12) (a) Calculer N^3 et $(I_3 + N)(I_3 - N + N^2)$.
(b) En déduire une expression de T^{-1} en fonction de I_3, N et N^2.

(13) On note g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est N.

(a) Justifier qu'il existe un vecteur u de $\mathbb{R}^3$ tel que $g \circ g(u) \neq 0$ et $g \circ g \circ g(u) = 0$.
(b) Montrer que la famille $\mathcal{B}_3 = (g \circ g(u), g(u), u)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
(c) Écrire la matrice de g dans la base $\mathcal{B}_3$.
(d) Calculer $N^2 - N$ et en déduire que les matrices N et $N^2 - N$ sont semblables.

(14) Montrer que les matrices T et T^{-1} sont semblables.

Exercice 408. (D'après **EDHEC 2013**)

(1) On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Vérifier que l'on a $A^2 \neq 0$ et calculer A^3.
(b) Déterminer une base (u) de $\mathrm{Ker}\,(f)$ ainsi qu'une base (v, w) de $\mathrm{Im}\,(f)$.
(c) Montrer que $\mathrm{Im}\,(f^2) = \mathrm{Ker}\,(f)$.

Dans la suite, on considère un endomorphisme g de R^3 tel que

$$g^2 \neq 0, \qquad \text{et} \qquad g^3 = 0,$$

ce qui signifie que $g \circ g$ n'est pas l'endomorphisme nul, mais que $g \circ g \circ g$ est l'endomorphisme nul. En désignant par M la matrice de g dans la base canonique $\mathbb{R}^3$ de $\mathbb{R}^3$ on a donc : $M^2 \neq 0$ et $M^3 = 0$.
On se propose de montrer, dans ce cas plus général, que $\mathrm{Im}\,(g^2) = \mathrm{Ker}\,(g)$.

(2) (a) Justifier qu'il existe un vecteur u de $\mathbb{R}^3$ tel que $g^2\,(u) \neq 0$.
(b) Montrer que $(u, g\,(u)\,, g^2\,(u))$ est une base de $\mathbb{R}^3$, que l'on notera $\mathcal{B}'$.
(c) Donner la matrice N de g dans la base $\mathcal{B}'$.
(d) Déterminer $\mathrm{Im}\,(g)$ et donner sa dimension. En déduire une base de $\mathrm{Ker}\,(g)$. Pour finir, déterminer $\mathrm{Im}\,(g^2)$ puis conclure.

Exercice 409. (Extrait de **DS n°4**, ECE1, Printemps 2018) On considère la matrice $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

et l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ de $\mathbb{R}^4$ est A.

(1) Montrer, sans pivot, que A n'est pas inversible et déterminer $\mathrm{Im}(f)$.

(2) (a) Calculer A^2, A^3, A^4.
(b) Déterminer noyau de f et préciser sa dimension.

(3) (a) Montrer que si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u \in \mathbb{R}^4$, avec $u \neq 0$ et $f(u) = \lambda u$, alors $f^4(u) = \lambda^4 u$. En déduire que $\lambda^4 = 0$ puis que $\lambda = 0$.
(b) Existe-t-il une base de $\mathbb{R}^4$ dans laquelle la matrice de f est diagonale?

(4) On note

$$\varepsilon_1 = e_1, \quad \varepsilon_2 = f(\varepsilon_1), \quad \varepsilon_3 = f(\varepsilon_2), \quad \varepsilon_4 = f(\varepsilon_3)$$

et $\mathcal{C} = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4\}$.

(a) Montrer que $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
(b) Déterminer la matrice N de f relativement à la base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^4$.

(5) Existe-t-il un endomorphisme bijectif g de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ tel que $g \circ f \circ g^{-1} = f^2$?

Exercice 410. (D'après **EDHEC 2017**) On note E l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 2 et on rappelle que la famille (e_0, e_1, e_2) est une base de E, les fonctions e_0, e_1 e_2 étant définies par :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad e_0(t) = 1 \quad e_1(t) = t \quad e_2(t) = t^2$$

On considère l'application φ qui, à toute fonction P de E, associe la fonction, notée $\varphi(P)$, définie par:

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad (\varphi(P))\,(x) = \int_0^1 P(x+t)\;dt$$

(1) (a) Montrer que φ est linéaire.
(b) Déterminer $(\varphi(e_0))\,(x)$, $(\varphi(e_1))\,(x)$ et $(\varphi(e_2))\,(x)$ en fonction de x, puis écrire $\varphi(e_0)$, $\varphi(e_1)$ et $\varphi(e_2)$ comme combinaison linéaire de e_0, e_1 et e_2.
(c) Déduire des questions précédentes que φ est un endomorphisme de E.

(2) (a) Écrire la matrice A de φ dans la base (e_0, e_1, e_2). On vérifiera que la première ligne de A est:
$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$
(b) Justifier que φ est un automorphisme de E.

(3) (a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, il existe un réel u_n tel que l'on ait :
$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{n}{2} & u_n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
Donner u_0 et établir que : $\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{6}(3n+2)$.
(b) En déduire, par sommation, l'expression de u_n pour tout entier n.
(c) Écrire A^n sous forme de tableau matriciel.

Exercice 411. (D'après **EDHEC 2019** et **CB n°3**, Automne 2019)
On considère les matrices
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
et on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $E = \mathcal{M}_{3,1}$.

(1) (a) Déterminer $(A-I)^2$.
(b) En déduire que A est inversible et écrire A^{-1} comme combinaison linéaire de I et A.

(2) On pose $A = N + I$.
(a) Exprimer pour tout entier naturel n, la matrice A^n comme combinaison linéaire de I et N, puis l'écrire comme combinaison linéaire de I et A.
(b) Vérifier que l'expression précédente est aussi valable pour $n = -1$.

(3) On pose $u_1 = (A-I)(e_1)$ et $u_2 = e_1 + e_3$.
(a) Montrer que l'ensemble $E_1 = \{X \in E : \ (A-I)X = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de E et que (u_1, u_2) en est une base.
(b) Montrer que la famille (u_1, u_2, e_1) est une base de $\mathbb{R}^3$.
(c) On note T la matrice dont les colonnes sont respectivement les coordonnées de Au_1, Au_2 et Ae_1 dans la base (u_1, u_2, e_1). Expliciter T.

(4) Soit la matrice $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Vérifier que P est inversible puis que $A = PTP^{-1}$.

(5) On note $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,1}, E_{2,2}, E_{2,3}, E_{3,1}, E_{3,2}, E_{3,3})$ la base canonique de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on rappelle que, pour tout (i,j) de $[\![1,3]\!]^2$, la matrice $E_{i,j}$ n'a que des coefficients nuls sauf celui situé à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne qui vaut 1.

(a) Montrer que l'ensemble E des matrices M qui commutent avec T, c'est-à-dire des matrices vérifiant l'égalité $MT = TM$, est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par la famille $(E_{1,1} + E_{3,3}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,2}, E_{2,3})$. Vérifier que la dimension de E est égale à 5.
(b) Soit N une matrice quelconque de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Établir l'équivalence :
$$NA = AN \iff (P^{-1}NP)T = T(P^{-1}NP)$$
(c) En déduire que l'ensemble F des matrices qui commutent avec A est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par la famille :
$$(P(E_{1,1} + E_{3,3})P^{-1}, PE_{1,2}P^{-1}, PE_{1,3}P^{-1}, PE_{2,2}P^{-1}, PE_{2,3}P^{-1}).$$

Approfondissement

Exercice 412. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère un vecteur v **fixé** de $\mathbb{R}^3$.
On considère également l'application f qui à tout vecteur $u = (a, b, c)$ de $\mathbb{R}^3$ associe le vecteur $f(u)$ définie par :

$$f(u) = u - (a + b + c)v$$

(1) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

(2) **Étude d'un cas particulier.** Dans cette question 3 seulement, on suppose que $v = (2, -1, 0)$.
- (a) Vérifier que $f(v) = 0$. f est-il un automorphisme ?
- (b) Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$.
- (c) On note $w = (-1, 1, 0)$ et $z = (0, -1, 1)$. Montrer que la famille (w, z) est également une base de $\mathrm{Im}(f)$.
- (d) En déduire, sans calculs supplémentaires, une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
- (e) Montrer que la famille $\mathcal{C} = (v, w, z)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
- (f) Déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ puis dans la base $\mathcal{C}$.

(3) **Retour au cas général.** On suppose maintenant que $v = (\alpha, \beta, \gamma)$ vérifie $\alpha + \beta + \gamma = 1$.
- (a) Montrer que $f(v) = 0$.
- (b) En déduire que $f \circ f = f$.
- (c) Montrer que le vecteur y appartient à $\mathrm{Im}(f)$ **si et seulement si** $f(y) = y$.
- (d) En déduire que les vecteurs $e_2 - e_1$ et $e_3 - e_2$ appartiennent à $\mathrm{Im}(f)$.
- (e) Déduire de la question 3a que $\mathrm{rg}(f) \leq 2$.
- (f) Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$.
- (g) Déterminer, en fonction de (α, β, γ) la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Cette matrice est-elle inversible ?
- (h) Montrer que la famille $\mathcal{C} = (v, e_2 - e_1, e_3 - e_2)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ puis déterminer la matrice de f dans cette base.

Exercice 413. *Les questions sont indépendantes*

(1) Soient E un espace vectoriel et u, v deux endomorphismes de E qui commutent. Montrer que $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont stables sous l'action de v.

(2) Soient $u = (1, 0, 0)$, $v = (1, 1, 1)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et $F = \mathrm{Vect}(u, v)$. Trouver un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ tel que $\mathrm{Ker}(f) = F$.

Exercice 414. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle telle que $A^2 = 0$ et $\mathrm{rg}(A) = r$. On note $(u_1, u_2, ..., u_r)$ une base de $\mathrm{Im}(A)$.

(1) Quelle est la dimension de Ker(A)?
(2) Montrer que Im(A) $\subset \mathrm{Ker}(A)$. En déduire que $n \geq 2r$.
(3) En déduire qu'il existe des vecteurs $v_1, v_2, ..., v_{n-2r}$ tels que $(u_1, ..., u_r, v_1, ..., v_{n-2r})$ forme une base de $\mathrm{Ker}(A)$.
(4) Montrer qu'il existe une matrice P inversible telle que

$$A = P \left(\begin{array}{c|c} 0 & I_r \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) P^{-1},$$

où I_r désigne la matrice identité de taille r.