



## Chapitre 6. Couples de variables aléatoires finies ou discrètes

Dans tout ce chapitre, les variables aléatoires considérées sont dites finies ou discrètes, c'est à dire que leur univers image  $X(\Omega)$  est un (sous-) ensemble fini ou discret de  $\mathbb{R}$ . Un sous-ensemble discret  $D$  de  $\mathbb{R}$  est un ensemble dont tous les éléments sont "espacés" les uns des autres : pour tout  $x \in D$ , il existe toujours un voisinage dans lequel le seul élément de  $D$  est  $x$ . Il n'y a pas besoin de comprendre cette définition. Pour nous, dans la plupart des cas  $X(\Omega)$  sera une partie de  $\mathbb{N}$ .

Toutes les variables aléatoires considérées sont définies sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  qu'on ne cherche, comme d'habitude, pas à expliciter.

### 1 Couples aléatoires discrets

#### Définition

On appelle **couple aléatoire discret** une application  $V : \Omega \mapsto \mathbb{R}^2$ .

Ainsi, on peut écrire  $V = (X, Y)$ , où  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires discrètes, avec :

$$\forall \omega \in \Omega, V(\omega) = (X(\omega), Y(\omega)).$$

#### 1.1 Loi conjointe

#### Définition

La **loi conjointe** du couple  $(X, Y)$  est la donnée de la fonction :

$$\begin{aligned} \varphi_{X,Y} : X(\Omega) \times Y(\Omega) &\rightarrow [0; 1] \\ (i, j) &\mapsto P([X = i] \cap [Y = j]). \end{aligned}$$

**Exercice 1.** Une urne contient 3 boules numérotées de 1 à 3. On tire successivement et sans remise deux boules dans cette urne et on note  $X$  le numéro de la première boule et  $Y$  le numéro de la deuxième boule.

Déterminer la loi conjointe de  $(X, Y)$ .

**Exercice 2.** On lance une pièce qui, à chaque lancer, donne *Pile* avec probabilité  $p$  et *Face* avec probabilité  $q = 1 - p$  (avec  $p \in ]0; 1[$ ). On note  $X$  le rang d'apparition du premier *Pile*,  $Y$  le rang d'apparition du premier *Face* et  $Z$  le rang d'apparition du second *Pile*.

- (1) Déterminer la loi conjointe de  $(X, Z)$ .
- (2) Déterminer la loi conjointe de  $(X, Y)$ .

☞ Ces deux premiers exercices ont permis de voir notamment que  $V(\Omega) \subsetneq X(\omega) \times Y(\Omega)$ .

### À retenir!

Pour obtenir la loi du couple  $(X, Y)$ , on commence par déterminer  $X(\Omega)$  et  $Y(\Omega)$  puis on donne les valeurs de  $P([X = i] \cap [Y = j])$  pour tout  $i \in X(\Omega)$  et tout  $j \in Y(\Omega)$  en décrivant l'évènement correspondant à l'observation *simultanée* de  $X$  et  $Y$ .

Lorsque  $X(\Omega)$  et  $Y(\Omega)$  sont finis, on peut résumer cette loi dans un tableau à double entrée.



Attention, en toute généralité

$$P([X = i] \cap [Y = j]) \neq P([X = i]) \cdot P([Y = j]).$$

☞ On peut parfois utiliser la formule des probabilités composées

$$P([X = i] \cap [Y = j]) = P_{[Y=j]}([X = i])P([Y = j]).$$

### Propriété

On a :

$$\sum_{i \in X(\Omega)} \sum_{j \in Y(\Omega)} P([X = i] \cap [Y = j]) = \sum_{j \in Y(\Omega)} \sum_{i \in X(\Omega)} P([X = i] \cap [Y = j]) = 1.$$

## 1.2 Lois marginales

### Définition

- (1) La première loi marginale du couple  $(X, Y)$  est la loi de la variable aléatoire  $X$ .
- (2) La seconde loi marginale du couple  $(X, Y)$  est la loi de la variable aléatoire  $Y$ .

### À retenir!

Soit  $(X, Y)$  un couple de variables aléatoires discrètes dont on connaît la loi conjointe.

- On obtient la loi de  $X$  grâce à la formule des probabilités totales avec le s.c.e  $\{[Y = j] : j \in Y(\Omega)\}$ .

$$\begin{aligned} P([X = i]) &= \sum_{j \in Y(\Omega)} P([X = i] \cap [Y = j]) \\ &= \sum_{j \in Y(\Omega)} P([Y = j])P_{[Y=j]}([X = i]) \end{aligned}$$

- On obtient la loi de  $Y$  grâce à la formule des probabilités totales avec le s.c.e  $\{[X = i] : i \in X(\Omega)\}$ .

$$\begin{aligned} P([Y = j]) &= \sum_{i \in X(\Omega)} P([X = i] \cap [Y = j]) \\ &= \sum_{i \in X(\Omega)} P([X = i])P_{[X=i]}([Y = j]) \end{aligned}$$

☞ Si la loi du couple est résumée dans un tableau à double entrée, les lois marginales s'obtiennent en sommant les éléments de chaque ligne et de chaque colonne.

**Exercice 3.** Donner les lois marginales des variables aléatoires  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  de l'Exercice 2.

## 1.3 Lois conditionnelles

**Définition**

Soit  $(X, Y)$  un couple de variables aléatoires discrètes.

- Soit  $j \in Y(\Omega)$  fixé tel que  $P([Y = j]) \neq 0$ .  
On appelle **loi conditionnelle de  $X$  sachant  $[Y = j]$**  la donnée des valeurs, pour tout  $i \in X(\Omega)$

$$P_{[Y=j]}([X = i]).$$

- Soit  $i \in X(\Omega)$  fixé tel que  $P([X = i]) \neq 0$ .  
On appelle **loi conditionnelle de  $Y$  sachant  $[X = i]$**  la donnée des valeurs, pour tout  $j \in Y(\Omega)$ ,

$$P_{[X=i]}([Y = j]).$$

**Exercice 4.** On dispose de  $n$  urnes numérotées de 1 à  $n$ . Pour chaque  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , l'urne  $k$  contient des boules, indiscernables au toucher, numérotées de 1 à  $k$ .

On choisit une urne au hasard et on pioche une boule dans cette urne. On note  $X$  le numéro de l'urne choisie et  $Y$  le numéro de la boule piochée.

- (1) Reconnaître la loi de  $X$ . Rappeler la valeur de  $E(X)$ .
- (2) Pour tout  $k \in X(\Omega)$ , déterminer la loi conditionnelle de  $Y$  sachant  $[X = k]$ .
- (3) En déduire la loi marginale de  $Y$ . On exprimera le résultat sous forme d'une somme qu'on ne cherchera pas à calculer.
- (4) Calculer  $E(Y)$ .
- (5) Écrire une fonction Python d'en-tête `def simul_XY(n) :` qui renvoie une simulation du couple  $(X, Y)$ .

**À retenir!**

On peut obtenir une loi conditionnelle de différentes manières suivants les situations:

- Si on connaît la loi du couple (donc les probabilités  $P([X = i] \cap [Y = j])$ ), on utilise la formule des probabilités composées. Par exemple, la loi conditionnelle de  $X$  sachant  $[Y = j]$  est donnée par :

$$P_{[Y=j]}([X = i]) = \frac{P([X = i] \cap [Y = j])}{P([Y = j])}, \quad \forall i \in X(\Omega).$$

- Si on ne connaît pas la loi du couple, on peut souvent reconnaître pour la loi conditionnelle une loi connue en utilisant l'information contenue dans l'évènement qui conditionne.

**Exercice 5.** On lance une pièce donnant pile avec probabilité  $p \in ]0; 1[$ . On note  $X$  le rang d'apparition du premier pile et si  $[X = n]$ , on note  $Y$  le nombre de faces obtenus lors de  $n$  lancers supplémentaires.

- (1) Déterminer la loi conditionnelle de  $Y$  sachant  $[X = n]$ .
- (2) Préciser  $Y(\Omega)$  puis montrer que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$P(Y = k) = \left(\frac{q}{p}\right)^{k-1} \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} (pq)^n.$$

## 2 Indépendance de variables aléatoires discrètes

### 2.1 Cas de deux variables

#### Définition

On dit que deux variables aléatoires discrètes  $X$  et  $Y$  sont **indépendantes** si et seulement si :

$$\forall (i, j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \quad P([X = i] \cap [Y = j]) = P([X = i]) \times P([Y = j])$$

#### À retenir!

☞ Pour montrer que deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  **ne sont pas** indépendantes, il suffit de trouver un contre-exemple à la relation précédente.

On cherche alors souvent des évènements  $[X = i]$  et  $[Y = j]$  de probabilité non nulle et tels que l'évènement  $[X = i] \cap [Y = j]$  est impossible donc de probabilité nulle.

**Exercice 6.** Montrer que les variables aléatoires  $(X, Y)$  de l'Exercice 1 ne sont pas indépendantes.

**Exercice 7.** On lance une pièce équilibrée  $n$  fois et on considère les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  correspondant respectivement au nombre de *Pile* et de *Face* obtenus.  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes?

### 2.2 Cas de $n$ variables

#### Définition

- On dit que les variables aléatoires discrètes  $X_1, \dots, X_n$  sont **mutuellement indépendantes** si et seulement si

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad P([X_1 = x_1] \cap \dots \cap [X_n = x_n]) = \prod_{k=1}^n P([X_k = x_k]).$$

- On dit que  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes si pour tout  $n \in \mathbb{N}$  les variables aléatoires  $X_0, \dots, X_n$  sont mutuellement indépendantes.

#### Question type de sujet de concours

On considère une suite  $(X_n)$  de variables mutuellement indépendantes de même loi géométrique  $\mathcal{G}(p)$ . On note  $Z_n = \min(X_1, \dots, X_n)$ .

(1) Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , pour tout  $j \in \mathbb{N}$ , montrer que  $P(X_j > k) = q^k$ .

(2) Justifier que  $P(Z_n > k) = P\left(\bigcap_{j=1}^n [X_j > k]\right)$ .

(3) En déduire la loi de  $Z_n$ .

### 2.3 Lemme des coalitions

#### Propriété

##### Lemme des coalitions.

- Si  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires discrètes indépendante et si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions numériques définies respectivement sur  $X(\Omega)$  et  $Y(\Omega)$  alors  $f(X)$  et  $g(Y)$  sont indépendantes.
- Soient  $X_1, \dots, X_n$  mutuellement indépendantes et soit  $p \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket$ . Alors toute variable aléatoire fonction des variables  $X_1, \dots, X_p$  est indépendante de toute variable aléatoire fonction des variables  $X_{p+1}, \dots, X_n$ .

#### Exemple

- Si  $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5$  sont 5 variables aléatoires discrètes mutuellement indépendantes alors les variables  $X_1 - X_2 + 2X_4^2$  et  $X_3 - X_5^2$  sont indépendantes.
- Si  $X^2$  et  $Y^2$  ne sont pas indépendantes, alors  $X$  et  $Y$  ne le sont pas non plus.

## 3 Fonctions de deux variables aléatoires discrètes

Dans cette section, on étudie des variables aléatoires du type  $Z = g(X, Y)$  où  $(X, Y)$  est un couple de variables aléatoires et  $g$  une fonction de  $X(\Omega) \times Y(\Omega)$  dans  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 8.** On se place à nouveau dans le cadre de l'Exercice 1, c'est à dire qu'on pioche successivement et sans remise deux boules dans une urne qui en contient 3, numérotées de 1 à 3. La variable aléatoire  $X$  (resp.  $Y$ ) correspond au numéro de la première (resp. deuxième) boule tirée.

- (1) Déterminer la loi de  $S = X + Y$ .
- (2) Déterminer la loi de  $D = X - Y$ .

**Exercice 9.** Soient  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$  et  $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(q)$  deux variables de Bernoulli indépendantes. Déterminer la loi de  $XY$ .

#### À retenir!

On obtient la **loi de la somme** (ou de la différence) deux variables aléatoires discrètes  $X$  et  $Y$  par application de la formule des probabilités totales avec au choix le s.c.e associé à  $X$  ou à  $Y$ .

$$\begin{aligned} P(X + Y = k) &= \sum_{i \in X(\Omega)} P([X + Y = k] \cap [X = i]) \\ &= \sum_{i \in X(\Omega)} P([Y = k - i] \cap [X = i]) \end{aligned}$$

et on utilise la loi conjointe de  $(X, Y)$  pour poursuivre le calcul.

☞ La probabilité  $P([X = i] \cap [Y = k - i])$  est nulle dès que  $k - i$  n'appartient pas à  $Y(\Omega)$ , ce qui a pour conséquence de restreindre les indices de la somme.

**Exercice 10.** Soient  $X$  et  $Y$  deux variables indépendantes suivant toutes deux la loi géométrique  $\mathcal{G}(p)$ .

- (1) Déterminer, en utilisant un s.c.e associé à  $X$ ,  $P(X = Y)$ .
- (2) Montrer, en utilisant un s.c.e associé à  $X$  que pour tout  $n \geq 2$  :  $P(X + Y = n) = (n - 1)p^2q^{n-2}$ .

### Propriété

**Stabilité par somme de variables aléatoires indépendantes usuelles.**

- **Somme de lois de Bernoulli.** Si  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sont  $n$  variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant une même loi de Bernoulli de paramètre  $p$ , alors

$$\sum_{k=1}^n X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p).$$

- **Stabilité des lois binomiales.** Soient  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$  et  $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(m, p)$  deux lois binomiales indépendantes. Alors,

$$X + Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n + m, p).$$

- **Stabilité des lois de Poisson.** Soient  $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$  et  $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$  deux lois de Poisson indépendantes. Alors,

$$X + Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda + \mu).$$

### Remarque

Pour généraliser ces résultats à des sommes de  $n$  variables (mutuellement) indépendantes et de même loi usuelle, on procède par récurrence avec notamment l'aide cruciale du **lemme des coalitions**.

**Exercice 11.** Soient  $X_1, \dots, X_k$  des variables aléatoires mutuellement indépendantes. Déterminer la loi de  $X_1 + \dots + X_k$  lorsque  $X_1 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_1), \dots, X_k \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_k)$ .

## 4 Calculs d'espérance

### 4.1 Espérance de $Z = g(X, Y)$ - Théorème de transfert

Le théorème de transfert, outil fondamental terriblement sous-estimé et incompris par un trop grand nombre d'étudiant.e.s, permet de calculer l'espérance d'une variable aléatoire de la forme  $Z = g(X, Y)$  sans connaître la loi de  $Z$  mais uniquement à partir de la loi du couple  $(X, Y)$ .

### Propriété

**Théorème de transfert.**

Soit  $(X, Y)$  deux variables aléatoires discrètes. Alors, on a (sous réserve de convergence absolue) :

$$E(Z) = E(g(X, Y)) = \sum_{i \in X(\Omega)} \sum_{j \in Y(\Omega)} g(i, j) P([X = i] \cap [Y = j]).$$

**Remarque**

Si  $X(\Omega)$  et  $Y(\Omega)$  sont deux ensembles finis, il n'y a pas de problème de convergence (absolue), puisqu'il s'agit alors d'une somme (double) finie.

Dans le cas où (au moins) un des deux ensembles est infini, le caractère licite de l'écriture de la somme ci-dessus est conditionné par la convergence absolue d'une série à double indice et présente donc un problème assez subtil. Les sujets des problèmes de concours faisant intervenir ce type de somme proposent donc un guidage étape par étape pour en justifier l'existence d'une telle somme ou bien admettent carrément la convergence de celle-ci.

**4.2 Espérance d'une somme****Propriété****Linéarité de l'espérance**

- Soient  $X_1, \dots, X_n$  des variables aléatoires discrètes admettant une espérance,  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ . Alors :

$$E(\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_n X_n) = \sum_{i=1}^n \lambda_i E(X_i).$$

- Lorsque les constantes sont égales à 1, on obtient le cas particulier important :

$$E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n E(X_i).$$

**Exercice 12.** Soient  $X_1, \dots, X_n$  des variables aléatoires de même loi admettant toutes une (même) espérance  $\mu$ . Déterminer l'espérance de la variable aléatoire

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

**4.3 Espérance d'un produit****Règle(s) de calcul**

Soit  $(X, Y)$  un couple de deux variables aléatoires discrètes. Alors, le théorème de transfert permet d'écrire, sous réserve de convergence absolue,

$$E(XY) = \sum_{i \in X(\Omega)} \sum_{j \in Y(\Omega)} ijP([X = i] \cap [Y = j]).$$

**Propriété**

Si  $X$  et  $Y$  sont **indépendantes** et admettent une espérance, alors  $XY$  admet une espérance, et on a

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

☞ On peut utiliser le théorème précédent pour montrer que deux variables aléatoires discrètes **ne sont pas** indépendantes en vérifiant que  $E(XY) \neq E(X)E(Y)$ .

**Exercice 13.** Soient  $X_1, X_2$ , et  $X_3$ , indépendantes, suivant des lois de Bernoulli de paramètre  $p$ . Montrer que les variables aléatoires  $Y_1 = X_1 X_2$  et  $Y_2 = X_2 X_3$  ne sont pas indépendantes.

## 5 Variance et covariance

### 5.1 Covariance

#### Définition

Soient  $(X, Y)$  deux variables aléatoires discrètes admettant des moments d'ordre 2.

La **covariance** de  $X$  et  $Y$  est définie par :

$$\text{cov}(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y))).$$

#### Règle(s) de calcul

##### Formule de König-Huyguens

Soient  $(X, Y)$  deux variables aléatoires discrètes admettant des moments d'ordre 2. Alors :

$$\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

En particulier, on a :

$$\text{cov}(X, X) = V(X)$$

**Exercice 14.** Déterminer la covariance des variables  $X$  et  $Y$  de l'Exercice 1.

**Exercice 15.** Une urne contient  $n$  boules blanches numérotées de 1 à  $n$  et 2 boules noires numérotées 1 et 2. On tire une à une, sans remise, toutes les boules de l'urne et on définit deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  correspondant respectivement au rang d'apparition de la première boule blanche et de la boule numérotée 1.

- (1) Déterminer les lois de  $X$  et  $Y$ .
- (2) Les variables  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes? Calculer  $\text{cov}(X, Y)$ .

#### Propriété

##### Propriétés de la covariance.

- Symétrie :  $\text{cov}(X, Y) = \text{cov}(Y, X)$ .
- Linéarité à gauche :  $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{cov}(\lambda X_1 + \mu X_2, Y) = \lambda \text{cov}(X_1, Y) + \mu \text{cov}(X_2, Y)$ .
- Linéarité à droite :  $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{cov}(X, \lambda Y_1 + \mu Y_2) = \lambda \text{cov}(X, Y_1) + \mu \text{cov}(X, Y_2)$ .

**Exercice 16.** Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires discrètes admettant un moment d'ordre 2.

- (1) Soit  $t \in \mathbb{R}$ . Montrer que

$$V(X + tY) = V(X) + 2\text{cov}(X, Y)t + V(Y)t^2$$

- (2) On note  $P : t \mapsto V(X + tY)$ . Justifier que, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $P(t) \geq 0$ . En déduire, à l'aide d'une considération sur un discriminant, que

$$\left| \frac{\text{cov}(X, Y)}{V(X)V(Y)} \right| \leq 1.$$

#### À connaître sur le bout des doigts

Si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, alors :  $\text{cov}(X, Y) = 0$ .



**La réciproque est fautive !**



## 5.2 Variance d'une somme

### Propriété

- Si  $X$  et  $Y$  admettent une variance, alors  $X + Y$  également, et :

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2 \cdot \text{cov}(X, Y).$$

- Si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, et admettent une variance, alors  $X + Y$  aussi, et on a :

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y).$$

- Si les variables  $X_1, \dots, X_n$  sont mutuellement indépendantes, et admettent une variance, alors la variable  $X_1 + \dots + X_n$  admette une variance et on a :

$$V(X_1 + \dots + X_n) = V(X_1) + \dots + V(X_n).$$

**Exercice 17.** Soient  $X_1, \dots, X_n$  des variables aléatoires indépendantes admettant toutes une même variance  $\sigma^2$ . Déterminer la variance de la variable aléatoire

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

## 5.3 Coefficient de corrélation linéaire

### Définition

Soit  $(X, Y)$  un couple de variables aléatoires discrètes admettant des variances non nulles. Le **coefficient de corrélation linéaire** de  $X$  et  $Y$  est la quantité définie par  $\rho_{X,Y} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$ .

### Propriété

On a obtenu dans l'Exercice 16 une inégalité qui se reformule comme suit.

Le coefficient de corrélation linéaire de  $X$  et  $Y$  est un réel compris entre  $-1$  et  $1$  :

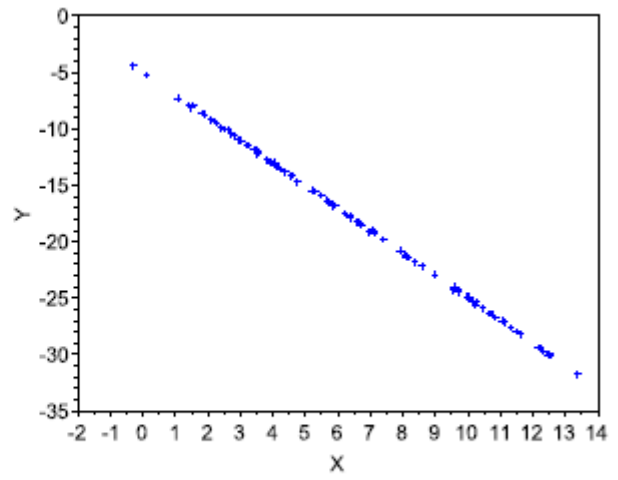
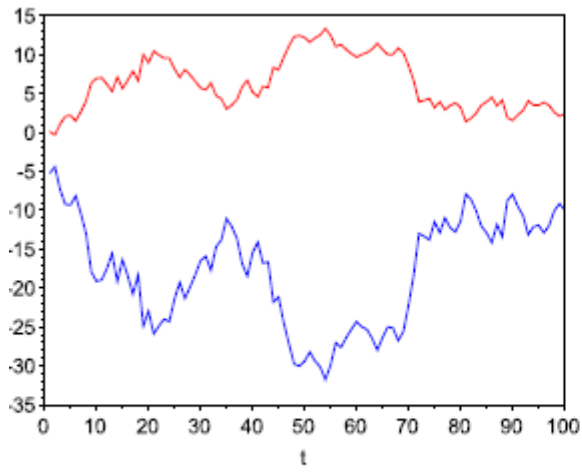
$$-1 \leq \rho_{X,Y} \leq 1.$$

### Propriété

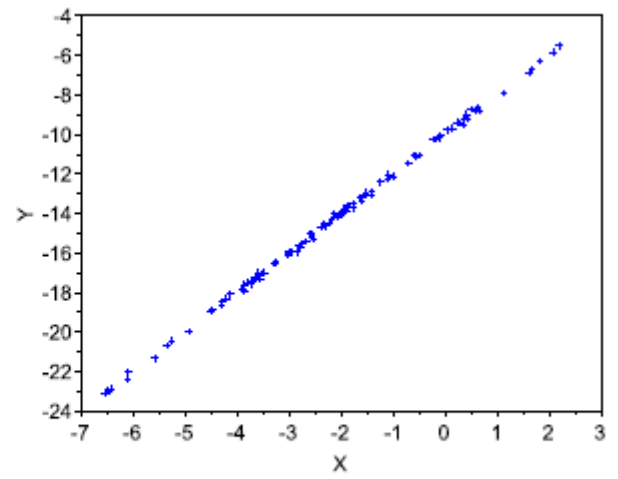
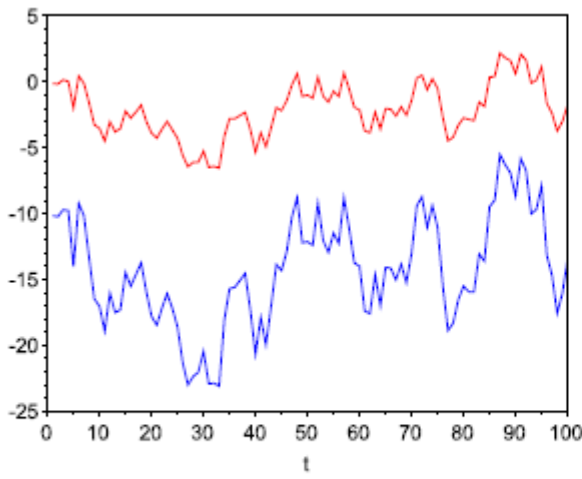
Le coefficient de corrélation linéaire de  $X$  et  $Y$  est un réel compris entre  $-1$  et  $1$  :

$$-1 \leq \rho_{X,Y} \leq 1$$

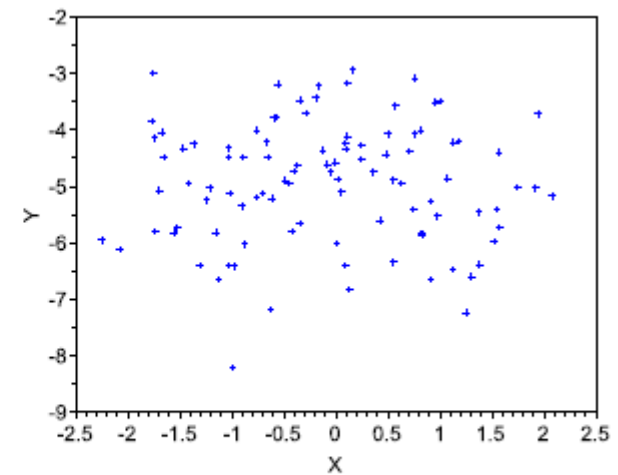
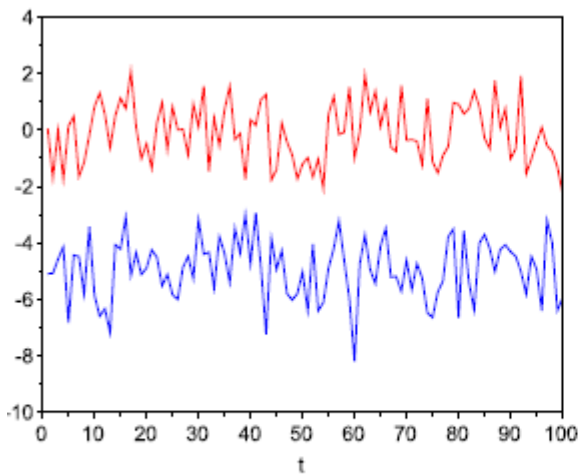
- Il est égal à  $1$  dans le cas où l'une des variables est fonction affine croissante de l'autre variable.
- Il est égal à  $-1$  dans le cas où l'une des variables est fonction affine décroissante de l'autre variable.
- Les valeurs intermédiaires renseignent sur le degré de dépendance linéaire entre les deux variables.
  - Plus le coefficient  $\rho_{X,Y}$  est proche des valeurs extrêmes  $-1$  et  $1$ , plus la corrélation entre les variables est forte.
  - Deux variables aléatoires dont la covariance est nulle (et donc le coefficient de corrélation linéaire est nul) sont dites non corrélées.
  - Une corrélation positive ( $\rho_{X,Y} > 0$ ) indique que les variables  $X$  et  $Y$  varient dans le même sens.
  - Une corrélation négative ( $\rho_{X,Y} < 0$ ) indique que les variables  $X$  et  $Y$  varient en sens inverse.



Corrélation négative



Corrélation positive



Corrélation nulle

## 6 Sélection d'exercices - Travaux dirigés

**Exercice 601.** Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires dont on suppose que la loi du couple est donnée par le tableau

	$Y$	1	2	3
$X$	1	$2\beta$	$3\beta$	$3\beta$
	2	$3\beta$	$2\beta$	$3\beta$
	3	$3\beta$	$3\beta$	$2\beta$

- (1) Déterminer la valeur du réel  $\beta$  pour que ce tableau représente effectivement la loi d'un couple.
- (2) Expliciter les lois marginales de  $X$  et  $Y$ . En déduire la valeur de  $E(X)$  et  $E(Y)$ .
- (3) Calculer  $E(XY)$  puis vérifier que

$$\text{Cov}(X, Y) = -\frac{1}{12}.$$

Les variables  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes?

**Exercice 602.** Une urne  $U_1$  contient  $n$  boules numérotées de 1 à  $n$ . Une urne  $U_2$  contient des boules rouges en proportion  $p$ . On tire une boule au hasard dans  $U_1$  et on note  $X$  la variable aléatoire correspondant au numéro de la boule obtenue. Si  $X = k$ , on tire  $k$  fois, avec remise, une boule dans l'urne  $U_2$  et on appelle  $Y$  le nombre de boules rouges tirées.

- (1) Déterminer la loi de  $X$ , son espérance et sa variance.
- (2) Déterminer la loi conditionnelle de  $Y$  sachant  $X = k$ , pour  $k \in X(\Omega)$ .
- (3) Déterminer la loi du couple  $(X, Y)$ .
- (4) Déterminer l'espérance et la variance de  $Y$ .

**Exercice 603.** Soient  $X$  et  $Y$  telles que  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$  et telles que la loi conditionnelle de  $Y$ , sachant  $X = k$  (où  $k \in X(\Omega)$ ) est une loi binomiale de paramètre  $n - k$  et  $p$ . Quelle est la loi de  $Y$ ?

**Exercice 604.** On place au hasard deux paires de chaussettes de couleurs différentes dans deux tiroirs notés  $t_1$  et  $t_2$ . Un tiroir peut donc contenir de 0 à 2 paires.

On note  $X_1$  et  $X_2$  respectivement les variables aléatoires égales au nombre de paires de chaussettes contenues dans les tiroirs  $t_1$  et  $t_2$  ainsi que  $N$  le nombre de tiroirs occupés.

On note alors  $T_i$  le numéro du tiroir choisi pour la paire de chaussettes numéro  $i$ . Les paires de chaussettes étant rangées dans les tiroirs indépendamment les unes des autres, on suppose donc que les variables  $T_1$  et  $T_2$  sont indépendantes.

- (1) Préciser les lois de  $T_1$  et  $T_2$ .
- (2) À l'aide des variables  $T_i$ , déterminer la loi conjointe du couple  $(N, X_1)$  que l'on présentera en recopiant et complétant le tableau suivant.

	$N$	0	1	2
$X_1$	1			
	2			

- (3) En déduire les lois marginales de  $N$  et  $X_1$ . Que dire de l'indépendance de  $N$  et  $X_1$ ?
- (4) Calculer  $E(N)$ ,  $E(X_1)$  puis  $\text{cov}(N, X_1)$ .
- (5) Que peut-on dire du couple  $(N, X_2)$  ?

**Exercice 605.** (Extrait de DM n°4, Automne 2021)

Un immeuble de  $p$  étages est équipé d'un ascenseur.  $N$  personnes montent dans l'ascenseur au rez de chaussée et descendent chacune à un étage au hasard et de façon indépendante.

Soit  $X$  le nombre d'arrêts de l'ascenseur.

On note  $X_i$  la variable valant 1 si l'ascenseur s'arrête à l'étage  $i$  et 0 sinon et on note  $E_k$  la variable aléatoire qui prend la valeur de l'étage où descend la  $k$ -ième personne.

- (1) Pour tout  $k \in \llbracket 1; N \rrbracket$ , quelle est la loi de  $E_k$ ?
- (2) En utilisant les variables aléatoires  $E_k$ , déterminer  $P(X_i = 0)$ .
- (3) Calculer  $E(X)$ .
- (4) Déterminer pour  $i$  différent de  $j$  :  $P(X_i = 0 \cap X_j = 0)$ .  
En déduire  $P(X_i X_j = 0)$ .
- (5) (\*) Déduire de la question précédente  $\text{Cov}(X_i, X_j)$  puis calculer alors  $V(X)$ .

**Exercice 606.** Une urne contient des boules numérotées de 1 à  $n$  (où  $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ ). On effectue deux tirages **sans remise** dans cette urne et on note  $X$  (resp.  $Y$ ) le plus petit (resp. grand) numéro obtenu.

- (1) Déterminer les lois de  $X$  et  $Y$  ainsi que  $E(X)$  et  $E(Y)$ .
- (2) Montrer que

$$P(X = i \cap Y = j) = \begin{cases} \frac{2}{n(n-1)}, & \text{si } 1 \leq i < j \leq n \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

- (3) Montrer que

$$E(XY) = \frac{(n+1)(3n+2)}{12}$$

et en déduire la  $\text{Cov}(X, Y)$ .

- (4) Écrire une fonction Python qui permette de simuler le couple  $(X, Y)$ . On commencera par simuler la pioche successive sans remise de deux boules.

**Exercice 607.** Un binôme de deux personnes nommées  $A$  et  $B$  participent à une épreuve physique. Ces deux personnes doivent grimper une corde. Une fois que l'une des deux personnes a réussi, elle doit attendre que l'autre personne en fasse de même. On considère que

- $A$  et  $B$  disposent chacun de leur propre corde.
- $A$  et  $B$  ont droit à autant d'essais qu'ils le souhaitent.
- Les essais sont indépendants.
- Chaque essai, qu'il soit réussi ou non, dure une minute et est réussi avec probabilité  $p$ .

On note  $X_1$  (resp.  $X_2$ ) le nombre d'essais nécessaires à  $A$  (resp.  $B$ ) pour grimper la corde, et  $Y$  la variable aléatoire réelle égale à  $|X_1 - X_2|$ .

- (1) Quelle est la loi de  $X_1$ ? De  $X_2$ ? Donner leur espérance et leur variance.
- (2) Que représente l'événement  $[Y = 0]$ ? Déterminer sa probabilité.
- (3) Montrer que pour tout  $a$ , pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,

$$P(Y = k) = \frac{2p(1-p)^k}{2-p}.$$

- (4) Écrire un programme Python permettant de simuler la variable aléatoire  $Y$ .
- (5) Pour quelles valeurs de  $p$  les deux personnes s'attendront-elles en moyenne moins de 5 minutes ?

**Exercice 608.** Un auto-stoppeur attend au péage d'une autoroute pendant une certaine période. On admet que le nombre de véhicules franchissant le péage pendant cette période est une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre  $\lambda > 0$ . A chaque fois qu'un véhicule franchit le péage, il lance une pièce truquée qui donne pile avec la probabilité  $p$ . On pose  $q = 1 - p$ .

On note  $N$ ,  $X$  et  $Y$  respectivement le nombre de lancers, le nombre de piles obtenus et le nombre de face obtenus.

- (1) (a) Pour tout couple  $(i, j)$  d'entiers naturels, calculer la probabilité  $P_{(N=j)}(X = i)$ .  
 (b) En déduire la loi du couple  $(X, N)$ .  
 (c) Montrer que  $X$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda p$ .
- (2) Expliquer sans aucun calcul pourquoi  $Y$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda q$ .
- (3) Montrer que  $X$  et  $Y$  sont indépendantes.
- (4) (a) Montrer que :  $V(Y) = V(N) + V(X) - 2\text{cov}(N, X)$ .  
 (b) En déduire  $\text{cov}(N, X)$ .  
 (c) Donner de même  $\text{cov}(N, Y)$ .

**Exercice 609.** (Extrait de **EML 2013**)

On considère une urne  $\mathcal{U}$  contenant  $n$  boules numérotées de 1 à  $n$  et indiscernables au toucher ( $n \geq 2$ ). On effectue une suite de tirages d'une boule avec remise de la boule dans l'urne  $\mathcal{U}$ .

Soit  $k$  un entier supérieur ou égal à 1. Pour tout  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ , on note  $X_i$  la variable aléatoire égale au nombre d'obtentions de la boule numéro  $i$  au cours des  $k$  premiers tirages.

- (1) Soit  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ . Donner la loi de  $X_i$ . Rappeler l'espérance et la variance de  $X_i$ .
- (2) Les variables aléatoires  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sont-elles indépendantes?
- (3) Soit  $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$  tel que  $i \neq j$ .  
 (a) Déterminer la loi de la variable  $X_i + X_j$ . Rappeler la variance de  $X_i + X_j$ .  
 (b) En déduire la covariance du couple  $(X_i, X_j)$ .

**Exercice 610.** (Un exercice **incontournable**).

On effectue une succession infinie de lancers indépendants d'une pièce donnant pile avec probabilité  $p$ . On note  $q = 1 - p$ .

On dit que la première série est de longueur  $n > 1$  si les  $n$  premiers lancers ont amené le même côté de la pièce et le  $(n + 1)$ -ième l'autre côté. De même la deuxième série commence au lancer suivant la fin de la première série et se termine au lancer précédant un changement de côté.

Soient  $X_1$  et  $X_2$  les variables aléatoires égales aux longueurs de la première et deuxième série.

- (1) Déterminer la loi de  $X_1$ .
- (2) Montrer que  $X_1$  admet une espérance et que  $E(X_1) = \frac{p}{q} + \frac{q}{p}$ .
- (3) Déterminer la loi du couple  $(X_1, X_2)$ .
- (4) En déduire la loi de  $X_2$ .
- (5) Montrer que  $X_2$  admet une espérance et que  $E(X_2) = 2$ .
- (6) Montrer que  $E(X_1 X_2)$  existe et que  $E(X_1 X_2) = \frac{1}{q} + \frac{1}{p}$ .

- (7) On suppose que  $p = 1/2$ . Montrer que  $X_1$  et  $X_2$  sont indépendantes.
- (8) On suppose que  $p \neq 1/2$ .
- (a) En considérant  $P([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1])$  montrer que  $X_1$  et  $X_2$  ne sont pas indépendantes.
- (b) Vérifier que  $\text{cov}(X_1, X_2) = 4 - \frac{1}{pq}$  puis en déduire une nouvelle preuve que  $X_1$  et  $X_2$  ne sont pas indépendantes.

**Exercice 611.** (Extrait de **ECRICOME 2016**)

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé et à valeurs dans  $\{1, \dots, N\}$ . On dit que  $X$  et  $Y$  sont *échangeables* si, pour tous entiers  $i, j \in \{1, \dots, N\}$

$$P((X = i) \cap (Y = j)) = P((X = j) \cap (Y = i)).$$

- (1) Montrer que si  $X$  et  $Y$  sont échangeables, alors elles suivent la même loi.
- (2) Montrer que si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes et de même loi, alors elles sont échangeables.
- (3) L'exemple suivant vise à montrer que la réciproque est fautive. Soient  $n, b, c$  trois entiers strictement positifs. Une urne contient initialement  $n$  boules noires et  $b$  boules blanches. On pioche une boule dans l'urne. On définit une première variable aléatoire  $X$  comme suit. Si la boule est noire, alors  $X = 1$  sinon  $X = 2$ .
- (a) Écrire en langage Python, une fonction simulant la variable  $X$ .
- (b) Déterminer la loi de  $X$ .

On remet la boule tirée dans l'urne ainsi que  $c$  boules supplémentaires de la couleur tirée. On tire une seconde boule et on introduit la variable aléatoire  $Y$  qui vaut 1 si la nouvelle boule tirée est noire et 2 sinon.

- (c) Déterminer la loi de  $Y$ .
- (d) Montrer que  $X$  et  $Y$  sont échangeables.
- (e) Sont-elles indépendantes?

**Exercice 612.** On considère une suite  $(X_n)$  de variables de Bernoulli,  $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(p_n)$ , un réel  $\lambda \in ]0; 1[$  et on suppose que

$$P_{[X_n=1]}(X_{n+1} = 1) = p_n, \quad P_{[X_n=0]}(X_{n+1} = 1) = \lambda p_n.$$

- (1) Montrer que

$$p_{n+1} = (1 - \lambda)p_n^2 + \lambda p_n.$$

- (2) Calculer  $\text{Cov}(X_n, X_{n+1})$  en fonction de  $p_{n+1}$  et  $p_n$ , puis en fonction de  $p_n$  et  $\lambda$ .
- (3) Les variables  $X_n$  et  $X_{n+1}$  sont-elles indépendantes?

**Exercice 613.** On met  $n$  jetons numérotés au hasard dans  $n$  boîtes numérotées (un seul jeton dans chaque boîte).

Soit  $X_k$  la variable valant 1 si le  $k$ -ième jeton est dans la  $k$ -ième boîte et 0 sinon.

Soit  $X$  le nombre de coïncidences entre les numéros des jetons et des boîtes.

- (1) Déterminer la loi de  $X_k$ .
- (2) Pour  $i$  différent de  $j$ , déterminer la loi de  $X_i X_j$ .
- (3) Exprimer alors  $\text{Cov}(X_i, X_j)$ .
- (4) (\*\*) Déterminer l'espérance et la variance de  $X$ .

## 7 Un exercice complet type concours

Cet exercice fait partie du **Concours Blanc** que j'ai posé à l'automne 2019.

Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 3.

Une urne contient une boule noire non numérotée et  $n-1$  boules blanches, dont  $n-2$  portent le numéro 0 et une porte le numéro 1. On extrait ces boules au hasard, une à une, **sans remise**, jusqu'à l'apparition de la boule noire.

Pour chaque  $i$  de  $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$ , on note  $B_i$  l'événement : "le  $i$ -ème tirage donne une boule blanche", et on pose  $\overline{B}_i = N_i$ . Enfin, on note  $X$  la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la boule noire et  $Y$  la variable aléatoire qui vaut 1 si la boule numérotée 1 a été piochée lors de l'expérience précédente, et qui vaut 0 sinon.

### Partie I - Simulation informatique

- (1) Compléter la fonction Python suivant afin qu'il simule l'expérience aléatoire décrite dans cet exercice et renvoie les valeurs prises par les variables  $X$  et  $Y$ .  
On admettra que la boule noire est codée tout au long de ce script par le nombre  $nB+1$ , où  $nB$  désigne le nombre de boules blanches.

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

def simul_XY(n) :
    nB=n-1
    x=1
    y=.....
    u=rd.randint(1,nB+2)
    while u<nB+1
        nB=.....
        if u==1 :
            y=.....
            u=rd.randint( ... , ... )
            x=.....
    return .....
```

- (2) Écrire une suite de commandes permettant, pour un  $n$  quelconque, d'obtenir la *covariance empirique* d'un échantillon de taille 1000 du couple  $(X, Y)$ .  
(3) En rentrant  $n = 4$ , le programme affiche 0.449475. Que peut-on conjecturer?

### Partie II - Loi conjointe de $X$ et $Y$

- (5) Donner l'ensemble  $X(\Omega)$  des valeurs que peut prendre la variable  $X$ .  
(6) (a) Pour tout  $i$  de  $\llbracket 2, n-1 \rrbracket$ , justifier que

$$P_{B_1 \cap \dots \cap B_{i-1}}(B_i) = \frac{n-i}{n-i+1}.$$

- (b) Utiliser la formule des probabilités composées pour trouver  $P(X = k)$ , pour tout  $k$  de  $X(\Omega)$ .  
(c) Reconnaître la loi de  $X$  et donner son espérance et sa variance.

(7) (a) Pour tout  $k$  de  $X(\Omega)$ , montrer, toujours grâce à la formule des probabilités composées, que

$$P([X = k] \cap [Y = 0]) = \frac{n - k}{n(n - 1)}.$$

(b) En déduire  $P(Y = 0)$  puis  $P([X = k] \cap [Y = 1])$ .

(c) Reconnaître la loi de  $Y$  et donner son espérance et sa variance.

(d) Les variables  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes?

### Partie III - Un calcul de covariance

(8) (a) On considère deux nombres entiers naturels  $k$  et  $n$  tels que  $n \geq k$ . Rappeler le lien entre les nombres

$$\binom{k}{j}, \quad \binom{k+1}{j+1} \quad \text{et} \quad \binom{k}{j+1}.$$

(b) Établir alors la formule suivante:

$$\sum_{k=j}^n \binom{k}{j} = \binom{n+1}{j+1}$$

(c) En faisant  $j = 2$ , en déduire une expression factorisée de la somme suivante:

$$\sum_{k=2}^n k(k-1).$$

(9) Montrer que

$$E(XY) = \sum_{k=1}^n kP([X = k] \cap [Y = 1]) = \frac{n+1}{3}.$$

(10) En déduire la valeur de  $\text{cov}(X, Y)$ .